РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ

В. А. БЕРКУН *(Харьков)*

Рассматривается осесимметричная задача фильтрации упругой жидкости в бесконечном упругом, однородном пласте. Давление на бесконечности принимается постоянным и равным начальному.

Для этих условий получено аналитическое решение задачи о точечном стоке, дебит которого изменяется по степенному закону во времени, при определенных ограничениях для показателя степени. Установлена связь с результатами, полученными в работе Г. И. Баренблатта и Н. П. Трифонова [1]. Показано, что в некоторых случаях полученное решение может быть выражено через произведение интегральной показательной функции и полинома Лагерра в сумме с произведением показательной функции и некоторого полинома.

В указанной задаче давление $p\ (r,\ t)$ в любой точке пласта на расстоянии r от центра в момент времени t удовлетворяет уравнению [2]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ r\ \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (\varkappa = \text{const} > 0) \tag{1}$$

и следующим условиям (где $\varkappa$ — пьезопроводность пласта [3])

$$p\ (r,\ 0) = p_0, \qquad p\ (\infty,\ t) = p_0, \qquad p_0 = \text{const} \tag{2}$$

и, кроме того, граничному условию

$$\lim_{a\to 0}\left(r\ \frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=a} = q_0\,(t) \tag{3}$$

Общим решением уравнения (1) при условиях (2) и (3) будет [4,5]

$$\Delta p\,(r,\ t) = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{q_0\,(\tau)}{\Delta\tau}\exp\left(-\ \frac{r^2}{4\varkappa\Delta\tau}\right)d\tau, \qquad \begin{array}{l}\Delta p\,(r,\ t) = p_0 - p\,(r,\ t)\\ \Delta\tau = t - \tau\end{array} \tag{4}$$

В равенствах (3) и (4) положим $q_0\ (t) = bt^\alpha$, $b =$ const, не оговаривая пока условий для показателя α (при $b > 0$ имеем сток, при $b < 0$ — источник). Воспользуемся симметрией свертки (4) и формулой [6] (5)

$$\int_0^t (\Delta\tau)^{\mu-1}\tau^{\nu-1}\exp\left(-\ \frac{\beta}{\tau}\right)d\tau = \beta^{1/2(\nu-1)}\,t^{1/2(\nu-1)+\mu}\Gamma\,(\mu)\exp\left(-\ \frac{\beta}{2t}\right)W_{1/2(1-\nu)-\mu,\ 1/2\nu}\left(\frac{\beta}{t}\right)$$

$$(\mu > 0,\ \beta > 0,\ t > 0)$$

В этой формуле положим $\mu - 1 = \alpha$, $\nu = 0$, $\beta = r^2 / 4\varkappa$. Из (4) и (5) имеем

$$\Delta p\,(r,\ t) = \frac{1}{2}\ bt^\alpha\Gamma\,(\alpha + 1)\ \left(\frac{4\varkappa t}{r^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\ \frac{r^2}{8\varkappa t}\right)W_{-(\alpha+1/2),\ 0}\left(\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) \tag{6}$$

при

$$\alpha + 1 > 0, \quad t > 0, \quad r > 0 \tag{7}$$

Здесь $W_{\lambda,\ \mu}\ (z)$ — функция Уиттекера [7].

Чтобы (6) удовлетворяло всем условиям поставленной задачи, необходимо усилить ограничения для α (7). Это связано, как покажет дальнейшее, с выполнением условия (3), которое требует, в отличие от (7), чтобы $r \geqslant 0$.

Обозначим

$$\varphi\,(z;\ \alpha) = \frac{1}{2}\ \Gamma\,(\alpha + 1)\,z^{-1/2}\exp\left(-\ \frac{z}{2}\right)W_{-(\alpha+1/2),\ 0}\,(z), \qquad z = \frac{r^2}{4\varkappa t} \tag{8}$$

Тогда из (6) получим

$$\Delta p\ (r,\ t) = bt^\alpha\varphi\ (z;\ \alpha)$$

Воспользуемся асимптотическим представлением [7]

$$W_{\lambda,\ \mu}\ (z) = \exp\ (-\ {}^1\!/_2 z)\ z^\lambda\ [1 + O\ (z^{-1})] \qquad (|\ \arg z\ | < \pi) \tag{9}$$

Полагая $\lambda = -\ (\alpha + {}^1\!/_2)$, $\mu = 0$, из (8) и (9) имеем асимптотическое выражение

$$\varphi\ (z;\ \alpha) = {}^1\!/_2\ \Gamma\ (\alpha + 1)\ z^{-(\alpha+1)}\exp\ (-z)\ [1 + O\ (z^{-1})] \tag{10}$$

Отсюда, так как $z \to \infty$ при $r \to \infty$ и при $t \to 0$, следуют начальное и граничное условия (2). Для проверки условия (3) воспользуемся [7] интегральным представлением функции $W_{\lambda,\mu}(z)$ при $\operatorname{Re}(\mu + {}^1/_2 - \lambda) \geqslant 0$

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{z^{\lambda} \exp(-{}^1/_2 z)}{\Gamma(\mu + {}^1/_2 - \lambda)} \int\limits_0^{\infty} u^{\mu - {}^1/_2 - \lambda} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{\mu - {}^1/_2 + \lambda} e^{-u}\, du \tag{11}$$

Положив $\lambda = -(\alpha + {}^1/_2)$, $\mu = 0$, имеем из (8) и (11) (при $\mu + {}^1/_2 - \lambda = \alpha + 1 > 0$, согласно (7))

$$\varphi(z;\ \alpha) = \frac{e^{-z}}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\alpha} e^{-u}}{(z+u)^{\alpha+1}}\, du = \frac{1}{2} \int\limits_z^{\infty} \left(1 - \frac{z}{v}\right)^{\alpha} \frac{e^{-v}}{v}\, dv \qquad (z + u = v) \tag{12}$$

Таким образом, имеем интегральное представление (12) функции (8) и, следовательно, (6).

Из (12) имеем оценку

$$0 \leqslant \varphi(z;\ \alpha) \leqslant \frac{1}{2}\,[-\operatorname{Ei}(-z)] \tag{13}$$

Далее, имеем, согласно (6), (8) и (12),

$$r\,\frac{\partial p}{\partial r} = -2bt^{\alpha} z \varphi'(z;\ \alpha) = \alpha b t^{\alpha} z \int\limits_z^{\infty} \left(1 - \frac{z}{v}\right)^{\alpha-1} \frac{e^{-v}}{v^2}\, dv \tag{14}$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (12) законно [7,8]. Для дальнейшего воспользуемся формулой [6] ($\lambda > 0$)

$$\int\limits_z^{\infty} (x - z)^{\lambda-1} x^{\nu-1} e^{-\beta x}\, dx = \beta^{-{}^1/_2(\lambda+\nu)} z^{{}^1/_2(\lambda+\nu)-1} \Gamma(\lambda) \exp\left(-\frac{\beta z}{2}\right) W_{{}^1/_2(\nu-\lambda),\ {}^1/_2 - {}^1/_2(\lambda+\nu)}(\beta z) \tag{15}$$

Здесь, положив $\beta = 1$, $\nu = -\alpha$, $\lambda = \alpha > 0$ (ср. с (7)), получим слева интеграл (14). Следовательно, имеем, учитывая множитель αz в (14),

$$2z\varphi'(z;\ \alpha) = -\Gamma(\alpha + 1)\, e^{-{}^1/_2 z} W_{-\alpha,\ {}^1/_2}(z) \qquad (\alpha > 0) \tag{16}$$

Так как для $W_{\lambda,\mu}(z)$ при $\mu = {}^1/_2$, $\lambda = -\alpha$ выполняется условие $\mu + {}^1/_2 - \lambda = \alpha + 1 > \alpha > 0$, то [7]

$$W_{-\alpha,\ {}^1/_2}(z) = \frac{z^{-\alpha} e^{-{}^1/_2 z}}{\Gamma(\alpha+1)} \int\limits_0^{\infty} u^{\alpha} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{-\alpha} e^{-u}\, du \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), имеем

$$\lim_{z\to 0} 2z\varphi'(z;\ \alpha) = -\int\limits_0^{\infty} e^{-u}\, du = -1 \tag{18}$$

Теперь получим окончательное условие для показателя α. Если в (16) положить формально $\alpha = 0$, то на основании функциональной связи [6]

$$W_{0,\ {}^1/_2}(z) = e^{-{}^1/_2 z} \tag{19}$$

имеем из (16)

$$2z\varphi'(z;\ 0) = -e^{-{}^1/_2 z} \tag{20}$$

где переход к пределу $z \to 0$ дает -1, т. е. условие (18). Из (18) и (14) следует (3), в котором $q_0(t) = bt^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 0$. Таким образом, усиление ограничения, по сравнению с (7), на показатель α существенно для задачи о точечном стоке (источнике), где r достигает значения 0. Итак, решением уравнения (1) при условиях (2) и

$$\lim_{a\to 0} \left(r\,\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=a} = bt^{\alpha} \qquad (\alpha \geqslant 0) \tag{21}$$

является

$$\Delta p\,(r,\ t) = bt^{\alpha} \varphi(z;\ \alpha) \tag{22}$$

где $\varphi(z;\alpha)$ определяется (8).

В работе [1], на основании автомодельности рассматриваемой задачи, решение ее сведено к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{2}\xi\right)\frac{df}{d\xi}-\alpha f=0 \qquad (\alpha\geqslant 0) \qquad (\xi=r(\varkappa t)^{-1/2}) \tag{23}$$

Функция $f(\xi;\alpha)$ удовлетворяет условиям

$$f(\infty;\ \alpha)=0,\qquad \left(\xi\frac{df}{d\xi}\right)_{\xi\to 0}=-1,\qquad \int\limits_0^t \xi f(\xi,\alpha)\,d\xi=\frac{1}{1+\alpha} \tag{24}$$

В упомянутой работе [1] получен ряд решений уравнения (23) путем его численного интегрирования и построены соответствующие графики $f(\xi,\alpha)$ для некоторых значений α в интервале $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

На основании теоремы единственности решения уравнения (1) (уравнения теплопроводности) можно утверждать, что полученное здесь решение (6) (без множителя bt^α) есть аналитическое выражение функции $f(\xi;\alpha)$ при $\alpha\geqslant 0$.

Так как $z={}^1/_4\xi^2$ (см. (23)), то

$$\varphi({}^1/_4\xi^2;\ \alpha)=f(\xi;\ \alpha)\qquad(\alpha\geqslant 0) \tag{25}$$

Действительно, функция $W_{-(\alpha+{}^1/_2),\,0}(z)$ удовлетворяет уравнению [7]

$$\frac{d^2u}{dz^2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha+{}^1/_2}{z}-\frac{1}{4z^2}\right)u=0 \tag{26}$$

в котором замена, согласно (8),

$$u(z)=\frac{2\sqrt{z}}{\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{z}{2}\right)\varphi(z;\ \alpha)$$

с точностью до постоянного множителя $2[\Gamma(\alpha+1)]^{-1}$ дает (27)

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\sqrt{z}\exp\left(\frac{z}{2}\right)\left[\varphi''(z;\ \alpha)+\left(1+\frac{1}{z}\right)\varphi'(z;\ \alpha)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}\right)\varphi(z;\ \alpha)\right]$$

$$-\left(\frac{1}{4}+\frac{(\alpha+{}^1/_2)}{z}-\frac{1}{4z^2}\right)u=-\sqrt{z}\exp\left(\frac{z}{2}\right)\left[\frac{1}{4}+\frac{\alpha+{}^1/_2}{z}-\frac{1}{4z^2}\right]\varphi(z;\ \alpha)$$

так что имеем, подставляя (27) в (26),

$$z\varphi''(z;\ \alpha)+(1+z)\varphi'(z;\ \alpha)-\alpha\varphi(z;\ \alpha)=0 \tag{28}$$

Замена $z={}^1/_4\xi^2$ приводит этот результат к уравнению (23), если принять обозначение (25). Выполнение первого условия (24) следует из (25) и (10), а второе условие (24) вытекает из (14), так как $2z\varphi'(z;\alpha)=\xi f'(\xi;\alpha)$, согласно (25).

Наконец, докажем интегральное соотношение (24) для $\varphi(z;\alpha)$. Согласно [6],

$$\int\limits_0^\infty z^{\nu-1}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(z)\,dz=\frac{\Gamma({}^1/_2+\nu+\mu)\,\Gamma({}^1/_2+\nu-\mu)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)} \tag{29}$$

если $\operatorname{Re}(\nu+{}^1/_2\pm\mu)>0$.

Замена $z={}^1/_4\xi^2$ в интеграле (24) приводит, с учетом (8), к интегралу

$$2\int\limits_0^\infty\varphi(z;\ \alpha)\,dz=\Gamma(\alpha+1)\int\limits_0^\infty z^{-1/2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)W_{-(\alpha+{}^1/_2),\,0}(z)\,dz \tag{30}$$

который является частным случаем интеграла (29) при $\nu={}^1/_2$, $\mu=0$, $\lambda=-(\alpha+{}^1/_2)$, причем $\nu+{}^1/_2\pm\mu=1$. Поэтому, при этих значениях ν, λ и μ из (30) и (29) имеем

$$2\int\limits_0^\infty\varphi(z;\ \alpha)\,dz=\Gamma(\alpha+1)\frac{[\Gamma(1)]^2}{\Gamma(\alpha+2)}=\frac{1}{1+\alpha} \tag{31}$$

Таким образом, доказано утверждение, что (8) — аналитическое выражение функции $f(\xi;\alpha)$ при $\alpha\geqslant 0$.

В заключение укажем ряд значений α, при которых функция (8) определяется через известную (табулированную) функцию — $\operatorname{Ei}(-z)$.

1) $\alpha=0$, т. е. дебит стока постоянный.

Согласно [7],

$$\varphi(z;\ 0)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} z^{-1/2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)W_{-1/2,\,0}(z)=\frac{1}{2}\left[-\mathrm{Ei}(-z)\right] \tag{32}$$

т. е. уже известный результат, например [3].

2) Более общий случай, когда α принимает значения чисел натурального ряда. Используя интегральное представление (12) функции $\varphi(z;\alpha)$, имеем

$$\varphi(z;\ n)=\frac{1}{2}\int_{z}^{\infty}\left(1-\frac{z}{v}\right)^{n}\frac{\exp(-v)}{v}\,dv=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}z^{k}\int_{z}^{\infty}\frac{\exp(-v)}{v^{k+1}}\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\Gamma(-k,\ z)\,z^{k}\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{33}$$

Здесь, $\Gamma(-k,z)$ — неполная гамма-функция. Воспользуемся рекуррентной формулой [6].

Из (33) получим

$$\Gamma(-k,\ z)=\frac{(-1)^{k}}{k!}\left[-\mathrm{Ei}(-z)+\exp(-z)\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^{s+1}s!\ z^{-(s+1)}\right] \tag{34}$$

$$\varphi(z;\ n)=\frac{1}{2}L_{n}(-z)\left[-\mathrm{Ei}(-z)\ +\frac{1}{2}\exp(-z)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^{k}}{k!}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^{s+1}s!\ z^{-(s+1)}\right]$$

$$L_{n}(-z)=\frac{1}{n!}e^{-z}\frac{d}{dz^{n}}(e^{z}z^{n})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n}{k!} \tag{35}$$

Здесь $L_n(-z)$ — полином Лагерра [6]. Если обозначить двойную сумму в (35) через $\sigma_n(z)$, то имеем для случаев $n = 1,2,3,4$ следующие полиномы:

$$\sigma_1(z)=-1,\qquad \sigma_2(z)=-2+{}^1/_2\,(1-z)$$
$$\sigma_3(z)=-3+{}^3/_2\,(1-z)-{}^1/_6\,[2-z(1-z)] \tag{36}$$
$$\sigma_4(z)=-4+3\,(1-z)-{}^2/_3\,[2-z(1-z)]+{}^1/_{24}\,\{6-z[2-z(1-z)]\}$$

Так как, согласно теореме Вейерштрасса [9], непрерывная на $0\leqslant t\leqslant\infty$ функция может быть аппроксимирована в интервале $0<t_0\leqslant t\leqslant T$ некоторым полиномом, то задача о точечном стоке может быть приближенно решена для любой непрерывной функции $q_0(t)$ в условии (3), причем решение может быть представлено в виде

$$\sum_{k=0}^{n} b_k t^k \varphi(z;\ k)$$

где n — показатель порядка аппроксимирующего многочлена, а $\varphi(z;\ k)$ определена (35)

Поступило 5 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. П. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 1.
2. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
3. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
4. Карслоу Х. С., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. Изд. иностр. лит., 1948.
5. Маскет М. Течение однородной жидкости в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е. Физматгиз, 1962.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 2. Физматгиз, 1963.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 1. Физматгиз, 1963.
9. Коровин П. П. Линейные операторы и теория приближений. Физматгиз, 1959.