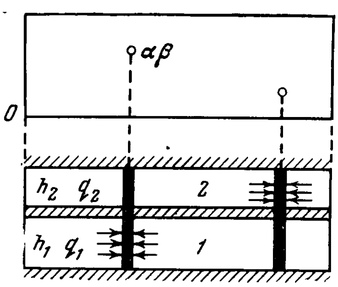
О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СКВАЖИН В ПЛАСТАХ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Б. В. ШАЛИМОВ

(Москва)

Основные уравнения, описывающие процесс фильтрации однородной жидкости в средах с двойной пористостью, получены в работе [1]. Аналогичные уравнения используются при изучении фильтрации однородной жидкости в пластах, разделенных слабопроницаемой перемычкой [2]. В данной работе решается задача об интерференции скважин в таких средах при площадной системе их размещения. Особое внимание уделено исследованию решения при периодических граничных условиях, которые характерны для циклических методов добычи нефти.

1. Рассмотрим неограниченно простирающийся пласт с двойной пористостью, характеризующийся, по принятой в [1] терминологии, проницаемостями, пористостями и коэффициентами сжимаемости первого и второго порядка k_1, m_{01}, β_{01} и k_2, m_{02}, β_{02} соответственно. Эти величины и мощность пласта h считаем постоянными. В прямоугольном элементе пласта, который двояко-периодически продолжается на всю плоскость течения с периодом a в направлении оси x и с периодом b в направлении оси y, имеется точечный источник или сток с координатами α, β. Если в элементе пласта имеется несколько скважин, решение получается путем суперпозиции решений для отдельных скважин. Объемные расходы скважин за счет фильтрации по трещинам и блокам равны соответственно $q_1(t)$ и $q_2(t)$. При нагнетании жидкости расходы считаются положительными, при отборе — отрицательными. Жидкость однородная с вязкостью μ и коэффициентом сжимаемости β_0.



Фиг. 1

Давление жидкости в трещинах и блоках $p_1(x, y, t)$ и $p_2(x, y, t)$ удовлетворяют системе уравнений [1]

$$\Delta p_i - \frac{1}{\varkappa_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\nu_i (p_j - p_i) \quad (i = 1, 2;\ j \neq i) \qquad (1.1)$$

$$\varkappa_i = k_i[\mu(\beta_{0i} + \beta_0 m_{0i})]^{-1}$$

$$c_i = hk_i / \mu, \quad \nu_i = \alpha_0 / k_i \qquad (1.2)$$

Здесь α_0 — безразмерная константа, характеризующая процесс обмена жидкостью между трещинами и блоками [1]. В случае фильтрации в пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой, разделенном слабопроницаемой перемычкой, давления $p_1(x, y, t)$ и $p_2(x, y, t)$ в высоко- и малопроницаемом слоях описываются теми же уравнениями (1.1), но с другими значениями коэффициентов [2]

$$\varkappa_i = k_i[\mu(\beta_{0i} + \beta_0 m_{0i})]^{-1}, \quad c_i = h_i k_i / \mu, \quad \nu_i = k_0 / h_0 h_i k_i \qquad (1.3)$$

Здесь k_1, k_2, m_{01}, m_{02}, β_{01}, β_{02}, h_1, h_2 — проницаемости, пористости, коэффициенты сжимаемости и мощности высоко- и малопроницаемого слоев, k_0 и h_0 — проницаемость и толщина перемычки (фиг. 1). Для объемных дебитов скважины из каждого пласта сохраним прежние обозначения.

Решение системы (1.1) при начальном условии

$$p_i(x, y, 0) \equiv p_0 = \text{const} \quad (i=1, 2) \tag{1.4}$$

имеющее особенности типа источников (стоков) в точках с координатами $\alpha + ma$, $\beta + nb$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, можно формально записать следующим образом: (1.5)

$$p_i(x, y, t) = p_0 + \frac{1}{4\pi c_i}\int_0^t \frac{q_i(t-\tau)}{\tau} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\alpha-ma)^2+(y-\beta-nb)^2}{4\varkappa_i\tau}\right]d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_i[p_j(\xi, \eta, t-\tau)-p_i(\xi, \eta, t-\tau)]}{4\pi\tau} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4\varkappa_i\tau}\right]d\xi\, d\eta$$

Первые два члена (1.5) соответствуют решению однородной системы (1.1), учитывающему начальное условие (1.4) и заданные особенности [3], последний член есть решение неоднородной системы (1.1) с нулевым начальным условием [4]. Уравнения (1.5) образуют систему интегральных уравнений относительно $p_i(x, y, t)$. Ввиду периодичности последних по x и y, ее можно записать иначе, используя одну из тета-функций

$$p_i(x, y, t) = p_0 + \frac{\varkappa_i}{abc_i}\int_0^t q_i(t-\tau)\, \vartheta_3\left(\frac{x-\alpha}{a}, \frac{4\varkappa_i\tau}{a^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{y-\beta}{b}, \frac{4\varkappa_i\tau}{b^2}\right)d\tau +$$

$$+\frac{\nu_i\varkappa_i}{ab}\int_0^t d\tau \int_0^a\int_0^b [p_j(\xi, \eta, t-\tau)-p_i(\xi, \eta, t-\tau)]\, \vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{a}, \frac{4\varkappa_i\tau}{a^2}\right)\times$$

$$\times\vartheta_3\left(\frac{y-\eta}{b}, \frac{4\varkappa_i\tau}{b^2}\right)d\xi\, d\eta \tag{1.6}$$

$$\vartheta_3(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x+n)^2}{t}\right] = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi nx \exp(-\pi^2 n^2 t) \tag{1.7}$$

2. Искомые функции представим в форме двойных тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, зависящими от времени t

$$p_i(x, y, t) = p_0 + \sum_{m, n=0}^{\infty}\delta_{mn}\gamma_{imn}(t)\cos\frac{2\pi m(x-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \tag{2.1}$$

$$\gamma_{imn}(t) = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b [p_i(\xi, \eta, t)-p_0]\cos\frac{2\pi m(\xi-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(\eta-\beta)}{b}d\xi\, d\eta \tag{2.2}$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m+n=0 \\ 2, & \text{если } m+n\neq 0,\ mn=0 \\ 4, & \text{если } mn\neq 0 \end{cases}$$

Подставим (2.1) в (1.6), учитывая (1.7) и (2.2). Сравнение коэффициентов при одинаковых m и n дает

$$\gamma_{imn}(t) = \int_0^t\left[\frac{\varkappa_i}{abc_i}q_i(t-\tau) + (-1)^i\nu_i\varkappa_i\varphi_{mn}(t-\tau)\right]\exp(-\tau\varkappa_i\omega_{mn})\, d\tau \tag{2.3}$$

$$\varphi_{mn}(t) = \gamma_{1mn}(t) - \gamma_{2mn}(t), \quad \omega_{mn} = 4\pi^2(m^2a^{-2}+n^2b^{-2}) \tag{2.4}$$

Вычтем второе уравнение (2.3) из первого и применим к полученному относительно $\varphi_{mn}(t)$ интегральному уравнению преобразование Лапласа по t. Изображение этой функции таково:

$$\varphi_{mn}^{\circ}(\sigma) = \frac{\varkappa_1 c_2(\sigma+\varkappa_2\omega_{mn})q_1^{\circ}(\sigma) - \varkappa_2 c_1(\sigma+\varkappa_1\omega_{mn})q_2^{\circ}(\sigma)}{abc_1c_2(\sigma^2+2a_{mn}\sigma+b_{mn})} \tag{2.5}$$

$$\varphi_{mn}{}^{\circ}(\sigma) = \int_0^\infty \varphi_{mn}(t)\, e^{-\sigma t}\, dt, \qquad q_i{}^{\circ}(\sigma) = \int_0^\infty q_i(t)\, e^{-\sigma t}\, dt \tag{2.6}$$

$$a_{mn} = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}\,\omega_{mn} + \frac{\nu_1\varkappa_1 + \nu_2\varkappa_2}{2}, \qquad b_{mn} = \varkappa_1\varkappa_2\omega_{mn}(\omega_{mn} + \nu_1 + \nu_2) \tag{2.7}$$

Знаменатель выражения (2.5) имеет простые корни

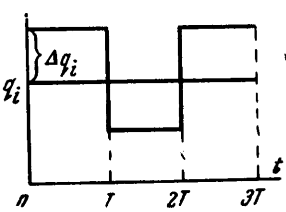
$$\sigma_1 = -a_{mn} + c_{mn}, \qquad \sigma_2 = -a_{mn} - c_{mn} \tag{2.8}$$

$$c_{mn}^2 = a_{mn}^2 - b_{mn} = \left[\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{2}\,\omega_{mn} + \frac{\nu_1\varkappa_1 - \nu_2\varkappa_2}{2}\right]^2 + \nu_1\nu_2\varkappa_1\varkappa_2 \tag{2.9}$$

Для обращения (2.5) воспользуемся теоремой об умножении изображений и второй теоремой разложения [5]

$$\varphi_{mn}(t) = \frac{\varkappa_1\varkappa_2}{ab}\int_0^t Q_1(t-\tau)\,\frac{\omega_{mn}}{c_{mn}}\,e^{-a_{mn}\tau}\,\mathrm{sh}\,c_{mn}\tau\,d\tau + \frac{1}{ab}\int_0^t Q_2(t-\tau)\,e^{-a_{mn}\tau}\left[\mathrm{ch}\,c_{mn}\tau - \frac{a_{mn}}{c_{mn}}\,\mathrm{sh}\,c_{mn}\tau\right]d\tau \tag{2.10}$$

$$Q_1(t) = \frac{q_1(t)}{c_1} - \frac{q_2(t)}{c_2}, \qquad Q_2(t) = \frac{\varkappa_1 q_1(t)}{c_1} - \frac{\varkappa_2 q_2(t)}{c_2} \tag{2.11}$$



Фиг. 2

Согласно (2.7) и (2.9)

$$a_{mn} - c_{mn} \geqslant b_{mn} / 2a_{mn} \geqslant \omega_{mn}\min(\varkappa_1, \varkappa_2)$$

Если $q_i(t)$ — ограниченные функции, то при m, $n \to \infty$ имеем $\varphi_{mn} \sim 1/\omega_{mn}$. Члены, появляющиеся при подстановке $\varphi_{mn}(t)$ в (2.3), имеют порядок $\sim 1 / \omega_{mn}{}^2$, т. е. ряды, соответствующие регулярной части (1.6), сходятся абсолютно и равномерно при любых x, y, t. Ряды, соответствующие источникам (стокам), сходятся всюду в элементарном прямоугольнике, за исключением точки $x = \alpha$, $y = \beta$, в которой по построению имеется особенность логарифмического порядка.

Внесем $\varphi_{mn}(t)$ в выражение (2.3), сделаем в нем перестановку интегралов и вычислим внутренний интеграл. Тогда

$$\gamma_{imn}(t) = \frac{1}{ab}\int_0^t e^{-a_{mn}\tau}\left\{\frac{\varkappa_i q_i(t-\tau)}{c_i}\left(\mathrm{ch}\,c_{mn}\tau - \frac{a_{mn}}{c_{mn}}\,\mathrm{sh}\,c_{mn}\tau\right) + \frac{\varkappa_1\varkappa_2}{c_{mn}}\left(\frac{q_i(t-\tau)}{c_i}\,\omega_{mn} + \frac{q_1(t-\tau)}{c_1}\,\nu_2 + \frac{q_2(t-\tau)}{c_2}\,\nu_1\right)\mathrm{sh}\,c_{mn}\tau\right\}d\tau \tag{2.12}$$

Для трещиноватых пород характерно, что проницаемость системы трещин значительно превосходит проницаемость системы пор в отдельных блоках [1]. Для таких пород можно считать, что закачка или отбор жидкости осуществляется только по трещинам, и поэтому в выражениях (2.12) можно приближенно положить $q_2(t) = 0$.

3. В качестве примера рассмотрим случай периодического изменения дебитов по закону (фиг. 2)

$$q_i(t) = q_i + (-1)^k\,\Delta q_i \text{ для } kT < t < (k+1)T \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{3.1}$$

После вычисления интеграла в (2.12) и некоторых преобразований полученных выражений коэффициенты $\gamma_{imn}(t)$ представим в виде

$$\gamma_{imn}(t) = \Gamma_{imn}(t, q_i(0)) - \Gamma_{imn}(0, q_i(t)) + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\,\Gamma_{imn}(t - jT, \Delta q_i)$$
$$kT < t < (k+1)\,T \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{3.2}$$

$$\Gamma_{i00}(t, q_i) = A(q_i)t + B(q_i)\exp(-\delta t) \quad (\delta = \varkappa_1\nu_1 + \varkappa_2\nu_2) \tag{3.3}$$

$$A(q_i) = \frac{\varkappa_i q_i}{abc_i} + \delta B(q_i), \quad B(q_i) = (-1)^i \frac{\varkappa_i \nu_i}{ab\delta^2}\left(\frac{\varkappa_1 q_1}{c_1} - \frac{\varkappa_2 q_2}{c_2}\right) \tag{3.4}$$

$$\Gamma_{imn}(t, q_i) = \frac{\exp(-a_{mn}t)}{abc_{mn}}\left\{\frac{\varkappa_i q_i}{c_i}\operatorname{sh} c_{mn}t - \frac{\varkappa_1\varkappa_2}{b_{mn}}\left(\frac{q_i}{c_i}\omega_{mn} + \frac{q_1}{c_1}\nu_2 + \frac{q_2}{c_2}\nu_1\right)\times\right.$$
$$\left.\times(c_{mn}\operatorname{ch} c_{mn}t + a_{mn}\operatorname{sh} c_{mn}t)\right\} \quad (m + n \neq 0) \tag{3.5}$$

Вычислим конечную сумму, входящую в $\gamma_{i00}(t)$. Тогда

$$\gamma_{i00}(t) = A(q_i)t + B(q_i)(e^{-\delta t} - 1) + A(\Delta q_i)\{(-1)^k\, t - T\,[(-1)^k\times$$
$$\times(k + {}^1/_2) - {}^1/_2]\} + B(\Delta q_i)(1 + e^{-\delta T})^{-1}\{(-1)^k[2e^{-\delta(t-kT)} - e^{-\delta T} - 1] +$$
$$+ e^{-\delta t}(e^{-\delta T} - 1)\} \tag{3.6}$$

Согласно (2.1), для давлений $p_i(x, y, t)$ имеем (штрих означает пропуск члена с $m = n = 0$)

$$p_i(x, y, t) = p_0 + \gamma_{i00}(t) + G_i(x, y, t) + H_i(x, y, t) \tag{3.7}$$

$$G_i(x, y, t) = -\sum_{m,n=0}^{\infty}{}' \delta_{mn}\Gamma_{imn}(0, q_i(t))\cos\frac{2\pi m(x-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \tag{3.8}$$

$$H_i(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' \delta_{mn}\left\{\Gamma_{imn}(t, q_i(0)) + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\Gamma_{imn}(t - jT, \Delta q_i)\right\}\times$$
$$\times\cos\frac{2\pi m(x-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b}, \quad kT < t < (k+1)T \ (k = 0, 1, \ldots) \tag{3.9}$$

Вычисление (3.9) облегчается тем, что (3.5) быстро убывает с ростом m, n и t. Действительно, $\exp[-t(a_{mn} \pm c_{mn})] \leqslant \exp[-t\omega_{mn}\min(\varkappa_1, \varkappa_2)]$. Если $\min(\varkappa_1, \varkappa_2) = \varkappa = 1.25$ $м^2/сек$, $a = b = 50$ $м$, то уже при $t = 5$ мин имеем $\exp(-4\pi^2 a^{-2}\varkappa t) \approx 0.0025$. Для циклических методов добычи нефти период $2T \sim 1$ мес. При $kT < t < (k+1)T$ $(k \geqslant 1)$ с большой точностью можно принять (3.10)

$$H_i(x, y, t) \approx \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' 2(-1)^k\delta_{mn}\Gamma_{imn}(t - kT, \Delta q_i)\cos\frac{2\pi m(x-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b}$$

Учитывая быстрое затухание переходных процессов в высоких гармониках, членом (3.10) вообще можно пренебречь по сравнению с членом (3.8), описывающим квазистационарные процессы. Согласно (3.5), (3.8),

$$G_i(x, y, t) = \frac{q_i(t)}{c_i}s(x, y) + (-1)^i\frac{\nu_i}{\nu}\left[\frac{q_1(t)}{c_1} - \frac{q_2(t)}{c_2}\right][s(x, y) - r(x, y)] \tag{3.11}$$

$$s(x, y) = \frac{1}{ab}\sum_{m,n=0}^{\infty}{}' \frac{\delta_{mn}}{\omega_{mn}}\cos\frac{2\pi m(x-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \tag{3.12}$$

$$r(x, y) = \frac{1}{ab}\sum_{m,n=0}^{\infty}{}' \frac{\delta_{mn}}{\omega_{mn} + \nu}\cos\frac{2\pi m(x-\alpha)}{a}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \tag{3.13}$$

Ряд (3.12) функции $s(x, y)$, имеющей логарифмические особенности, преобразован в быстросходящийся в [6]

$$s(x, y) = \frac{a(3\xi^2 + 2)}{24b} - \frac{1}{4\pi}\ln 2\left[\operatorname{ch}\frac{\pi a\xi}{b} - \cos\frac{2\pi(y-\beta)}{b}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{\pi na}{b}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi n\xi a}{b}\operatorname{csch}\frac{\pi na}{b}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \tag{3.14}$$

Функцию $r_1(x, y) = s(x, y) - r(x, y)$ после аналогичных преобразований можно записать в виде

$$r_1(x, y) = \frac{a(3\xi^2+6\xi+2)}{24b} + \frac{1}{ab\nu} - \frac{\operatorname{ch}[a(\xi+1)\sqrt{\nu}/2]}{2b\sqrt{\nu}\operatorname{sh}(a\sqrt{\nu}/2)} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{ch}[\pi n(1+\xi)a/b]}{n\operatorname{sh}(\pi na/b)} - \frac{\operatorname{ch}[\pi\omega_n(1+\xi)a/b]}{\omega_n\operatorname{sh}(\pi\omega_n a/b)}\right\}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \qquad (3.15)$$

$$\nu = \nu_1+\nu_2, \quad \omega_n = \sqrt{n^2+\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{b\sqrt{\nu}}{2\pi}, \quad \xi = \left|1 - 2\frac{|x-\alpha|}{a}\right| - 1) \qquad (3.16)$$

При небольших значениях параметра ε члены ряда (3.15) убывают с ростом n как n^{-3}. Получим другое выражение $r(x, y)$, пригодное для больших ε. Для этого просуммируем ряд (3.13) по m аналогично [6] и воспользуемся тождеством ($0 < x < 1$, $t > 0$, $\varepsilon > 0$, K_0 — функция Макдональда)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega_n^{-1}\exp(-2\pi t\omega_n)\cos 2\pi nx = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}K_0\left(2\pi\varepsilon\sqrt{t^2+(n+x)^2}\right) \qquad (3.17)$$

которое получается в результате применения формулы суммирования Пуассона [7] к левой части (3.17). Тогда

$$r(x, y) = \frac{\exp(-a\sqrt{\nu}/2)\operatorname{ch}(\xi a\sqrt{\nu}/2)}{2b\sqrt{\nu}\operatorname{sh}(a\sqrt{\nu}/2)} - \frac{1}{ab\nu} + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}K_0\left\{2\pi\varepsilon\left[\left(n+\frac{|y-\beta|}{b}\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi^2a^2}{4b^2}\right]^{1/2}\right\} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\exp\left(-\frac{\pi a\omega_n}{b}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi a\xi\omega_n}{b}\operatorname{csch}\frac{\pi a\omega_n}{b}\cos\frac{2\pi n(y-\beta)}{b} \qquad (3.18)$$

Формулы (3.14), (3.15) и (3.18) справедливы в основном элементе $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, в котором $-1 \leqslant \xi \leqslant 0$, $0 \leqslant |y-\beta|/b \leqslant 1$ и без ограничения общности можно принять $a \geqslant b$, благодаря чему произведения гиперболических функций в (3.14) и (3.18) ограничены, а экспоненциальные множители быстро убывают с ростом n. Для вычисления $r_1(x, y)$ удобнее пользоваться формулой (3.15), если $\varepsilon \leqslant 1$, и формулами (3.14) и (3.18), если $\varepsilon \geqslant 1$. В последнем случае хорошая сходимость ряда по функции Макдональда обеспечивается асимптотикой для этой функции $K_0(x) \sim \sqrt{\pi/2x}\exp(-x)$ при достаточно больших x. Полученное здесь решение позволяет оценить эффект обмена жидкостью между средами разной пористости, что важно для циклических методов добычи нефти.

Автор благодарит В. Л. Данилова и А. А. Боксермана за постановку задачи и замечания при обсуждении результатов.

Поступило 2 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Чарный И. А. Фильтрация в пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой, разделенном слабопроницаемой перемычкой. Тр. Моск. ин-та нефтехим. и газ. пром-сти им. И. Т. Губкина, 1961.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е перераб. Физматгиз, 1958.
6. Шалимов Б. В. К определению поля давления в системе площадного размещения скважин при упругом режиме. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
7. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз, 1962.