ПРИТОК ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ К СОВЕРШЕННОЙ ГАЛЕРЕЕ И СКВАЖИНЕ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ, С. Т. РЫБАКОВА

(Новосибирск)

Часто бывает, что воды различных водоносных горизонтов имеют различную минерализацию. В глинистых прослойках обычно происходит скопление солей. Поэтому при откачке из одного горизонта в него могут попадать воды из двух соседних пластов или глинистых прослоек и откачиваемая вода может быть смесью вод различной минерализации.

В работе Н. К. Гиринского [1] в предположениях относительной малости мощности водоносной толщи были установлены некоторые гидравлические критерии установившегося плоского безнапорного движения двух потоков разной минерализации. Однако при рассмотрении конкретных задач можно убедиться, что при различных плотностях жидкостей ($\rho_1 \neq \rho_2$) для определения четырех констант интегрирования, кроме трех граничных условий, необходимо установление дополнительного условия. Этим условием здесь будет возможность представления искомых величин в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon_\rho = 1 - \rho_1 / \rho_2$.

§ 1. Движение в одном напорном пласте. Рассмотрим приток двух жидкостей с различными физическими свойствами к галерее в полубесконечном пласте со слабопроницаемыми кровлей и подошвой. Будем считать выполненными следующие предположения: (1) $k \gg \varkappa_1, \varkappa_2$; (2) существует четкая линия раздела жидкостей; (3) вне пласта $h_1 = H_1$, $h_2 = H_2$ ($\rho_1 H_1 = \rho_2 H_2 = \mathrm{const}$); (4) жидкости и пористая среда несжимаемы

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Здесь $k, \varkappa_1, \varkappa_2$ — проницаемости пласта, кровли и подошвы, m, λ_1, λ_2 — их мощности соответственно, $h_i(x, y, t)$ — напоры, σ — пористость.

Пусть $\eta = \eta(x, t)$ — ордината линии раздела жидкостей, отсчитываемая от подошвы пласта. Принимая во внимание (1) — (4), составим уравнения баланса масс для промежутка времени от t до $t + dt$ в элементе длины dx

$$v_2(x, y, t)\,\eta(x, t)\,dt - v_2(x + dx, y, t)\,\eta(x + dx, t) + \frac{\varkappa_2 \rho_2 g}{\mu_2 \lambda_2}(H_2 - h_2)\,dt\,dx = \sigma \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t}\,dt\,dx \tag{1.1}$$

$$v_1(x, y, t)\,[m - \eta(x, t)]\,dt - v_1(x + dx, y, t)\,[m - \eta(x + dx, t)]\,dt + \frac{\varkappa_1 \rho_1 g}{\mu_1 \lambda_1}(H_1 - h_1)\,dt\,dx = \sigma \frac{\partial (m - \eta)}{\partial t}\,dt\,dx$$

Здесь v_i — продольные скорости, ρ_i — плотности, μ_i — вязкости. Над и под линией раздела соответственно имеем:

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho_1 g} + y, \qquad h_2 = \frac{p_2}{\rho_2 g} + y$$

Далее предположим, что функции h_i, каждая в своей области, не зависят от y. Тогда условие непрерывности давления при $y = \eta(x, t)$ приводит к соотношению

$$h_1(x, t) = \frac{\rho_1}{\rho_2} h_2(x, t) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \eta(x, t) \tag{1.2}$$

Вводя безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{m}, \quad \tau = \frac{k\rho_2 g}{m\sigma\mu_2} t, \quad \varepsilon_i = \frac{\varkappa_i m}{k\lambda_i}, \quad \varepsilon_\rho = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \varepsilon_\mu = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

и сохраняя для отнесенных к мощности m пласта ординаты линии раздела и напоров прежние обозначения, получим из (1.1) и (1.2) следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta \frac{\partial h_2}{\partial \xi}\right) + \varepsilon_2 (H_2 - h_2) = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial \xi^2} + \varepsilon_\rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\eta)\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right] + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(H_2 - h_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_\rho \eta = \varepsilon_\mu \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Начальные и граничные условия запишем в виде

$$\eta(\xi, 0) = 0, \qquad h_2(\xi, 0) = h_2(\infty, \tau) = H_2$$

$$(1 - \varepsilon_\mu)\eta \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + (1-\eta)\left(\frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \varepsilon_\rho \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right) = q(1 - \varepsilon_\mu) \qquad \text{при } \xi = 0 \tag{1.4}$$

Здесь q — некоторый безразмерный дебит галереи. Предположим теперь, что функции $h_2(\xi, \tau, \varepsilon_\rho, \varepsilon_\mu)$ и $\eta(\xi, \tau, \varepsilon_\rho, \varepsilon_\mu)$ могут быть разложены в ряды по степеням параметров ε_ρ и ε_μ;

$$\begin{gathered} h_2 = h_2^{(0,0)} + \varepsilon_\rho h_2^{(1,0)} + \varepsilon_\mu h_2^{(0,1)} + \ldots + \varepsilon_\rho^i \varepsilon_\mu^j h_2^{(i,j)}(\xi, \tau) \ldots \\ \eta = \eta^{(0,0)} + \varepsilon_\rho \eta^{(1,0)} + \varepsilon_\mu \eta^{(0,1)} + \ldots + \varepsilon_\rho^i \varepsilon_\mu^j \eta^{(i,j)}(\xi, \tau) + \ldots \end{gathered} \tag{1.5}$$

Подстановкой (1.5) в (1.3) и (1.4) и приравниванием членов с одинаковыми степенями ε_ρ и ε_μ получим расщепляющиеся линейные системы уравнений и условий к ним, дающие возможность последовательно определить все функции $h_2^{(i,j)}$ и $\eta^{(i,j)}$.

Примем $q = \mathrm{const}$ и приведем решение задачи о движении отмеченных частиц жидкости (т. е. для случая $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\mu = 0$).

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial \xi^2} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h_2 - H_2) = 0, \qquad \eta \frac{\partial^2 h_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\frac{\partial h_2}{\partial \xi} - \varepsilon_2 (h_2 - H) = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \tag{1.6}$$

а граничные и начальные условия к ним запишутся так:

$$\frac{\partial h_2}{\partial \xi} = q \quad \text{при } \xi = 0, \qquad h_2(\xi, 0) = h_2(\infty, \tau) = H_2, \qquad \eta(\xi, 0) = 0$$

Интеграл первого уравнения системы (1.6) при выписанных условиях суть

$$h_2 = H_2 - \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} e^{-\xi\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

Второе уравнение примет вид

$$\frac{1}{q} e^{\xi\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \eta\right)$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия, получим

$$\eta(\xi, \tau) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q\tau\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\exp(-\xi\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})}{1 + q\tau\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\exp(-\xi\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2})} \tag{1.7}$$

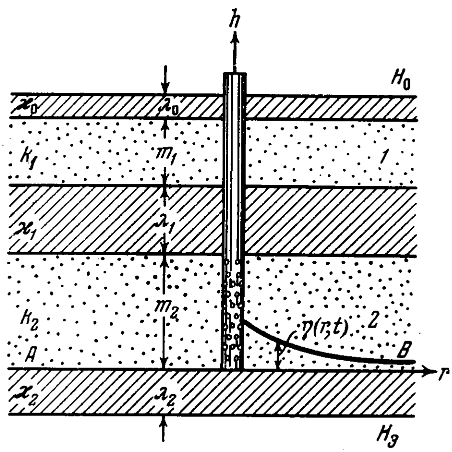
Можно показать, что для пласта конечной протяженности время установления линии отмеченных частиц будет конечно.

§ 2. Напорное движение в двух пластах. Пусть k_1, k_2, $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — проницаемости соответствующих пластов и прослоек, m_1, m_2, λ_0, λ_1, λ_2 — их мощности, σ_1, σ_2 — пористости первого и второго пластов, $\eta(r, t)$ — поверхность раздела жидкостей, h_1, h_{21}, h_{22} — напоры в первом пласте, над поверхностью раздела и под ней соответственно (фиг. 1) и выполнены условия (1) — (4) § 1.

Будем считать, что напоры h_1, h_{21}, h_{22} не изменяются по высоте, т. е. будут функциями двух переменных r, t.

Пусть, далее, жидкость с плотностью ρ_1 и вязкостью μ_1 находилась над линией AB, жидкость с параметрами ρ_2, μ_2 — под ней. При откачке из второго пласта вследствие взаимодействия пластов начнется подъем поверхности раздела.

2.1°. *Осесимметричное движение.* Введем безразмерные переменные



Фиг. 1

$$\xi = \frac{r}{m_2}, \qquad \tau = \frac{k_2\rho_2 g}{m_2\sigma_2\mu_2} t$$

$$\varepsilon_j = \frac{m_2\varkappa_j}{k_2\lambda_j}, \qquad \beta = \frac{k_1 m_1}{k_2 m_2}$$

$$q = \frac{Q\mu_2}{2\pi k_2 m_2^2 \rho_2 g}, \qquad \varepsilon_\rho = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\varepsilon_\mu = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Рассмотрим элемент второго пласта и составим уравнения баланса массы обеих жидкостей за время dt, учитывая сделанные предположения и соотношение между напорами

$$h_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_{22} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \eta$$

Присоединив еще уравнение баланса в элементе первого пласта [2] и пренебрегая малыми высшего порядка, рассматриваемую задачу сведем к решению системы уравнений

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \eta\Delta h_{22} + \frac{\partial h_{22}}{\partial\xi}\frac{\partial\eta}{\partial\xi} - \varepsilon_2 (h_{22} - H_3) \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$\varepsilon_\mu \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \Delta h_{22} - \varepsilon_1 (h_{22} - h_1) - \varepsilon_2 (h_{22} - H_3) - \varepsilon_\rho \left[(1-\eta)\Delta\eta + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2 + \varepsilon_1\eta\right]$$

$$0 = (1 - \varepsilon_\rho)[\beta\Delta h_1 - \varepsilon_0(h_1 - H_0)] - \varepsilon_1(h_1 - h_{22} + \varepsilon_\rho\eta) \tag{2.1}$$

при условиях

$$h_1(\infty, \tau) = H_0, \quad h_{22}(\infty, \tau) = H_3, \quad \lim_{\xi\to 0}\left(\xi\frac{\partial h_1}{\partial\xi}\right) = 0, \quad \eta(0, \xi) = 0 \tag{2.2}$$

$$\lim_{\xi\to 0}\left[(1-\varepsilon_\mu)\,\xi\eta\frac{\partial h_{22}}{\partial\xi} + \xi(1-\eta)\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial\xi} - \varepsilon_\rho\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)\right] = q(1-\varepsilon_\mu)$$

Здесь под H_3, H_0, h_1, h_{21}, h_{22}, η следует подразумевать соответствующие напоры и поверхность раздела, отнесенные к m_2.

Если теперь предположим, что ε_ρ, ε_μ — малые величины, то задачу (2.1), (2.2) можно решать, делая разложение искомых функций в ряды типа (1.5) по этим малым параметрам.

Примем в дальнейшем

$$\beta = 1, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \tag{2.3}$$

Тогда первыми членами в разложениях для $h_1(\xi, \tau)$ и $h_{22}(\xi, \tau)$ будут [2]

$$h_1 = H_3 - {}^1/_2 q\,[K_0(\omega_2\xi) - K_0(\omega_1\xi)]$$

$$h_{22} = H_3 - {}^1/_2 q\,[K_0(\omega_2\xi) + K_0(\omega_1\xi)]$$

$$(\omega_1{}^2 = 3\varepsilon, \ \omega_2{}^2 = \varepsilon)$$

Здесь $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка, и первый член в разложении для $\eta(\xi, \tau)$ определится из уравнения

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau_1} - [K_1(\zeta) + \sqrt{3}K_1(\sqrt{3}\zeta)]\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} =$$

$$= -[3K_0(\sqrt{3}\zeta) + K_0(\zeta)]\,\eta + K_0(\zeta) + K_0(\sqrt{3}\zeta) \tag{2.4}$$

и условия

$$\eta(\zeta, 0) = 0 \tag{2.5}$$

$$(\zeta = \omega_2\xi, \ \tau_1 = {}^1/_2 q\varepsilon\tau, \ K_1(x) = -K_0{}'(x))$$

Решение задачи Коши (2.4), (2.5) осуществлено методом характеристик на ЭВМ М-20. На фиг. 2 представлено положение границы раздела для $\tau_1 = 0.05$, 0.1, 0,3, что соответствует, если принять, например, $m_2 = 20$ *м*, $\sigma_2 = 0.3$, $k_2\rho_2 g/\mu_2 = 10$ *м/сут*, $\lambda_2 = 5$ *м*, $\varkappa_2\rho_2 g/\mu_2 = 10^{-2}$ *м/сут*, $Q = 2500$ *м³/сут*, $t = 150$ *сут*, 300 *сут*, 900 *сут*.

Уравнение для установившейся поверхности раздела будет иметь вид

$$\eta\Delta h_{22} + \frac{dh_{22}}{d\xi}\frac{d\eta}{d\xi} - \varepsilon_2(h_{22} - H_3) = 0 \tag{2.6}$$

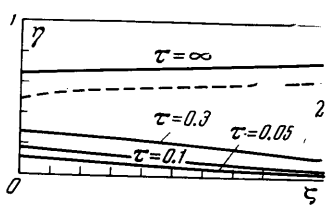
Для получения граничного условия умножаем (2.6) на ξ и проинтегрируем почленно от 0 до ∞.

Из условия ограниченности функции $\eta(\xi)$ при $\xi \to \infty$ будем иметь

$$\eta(0) = \varepsilon_2 \int_0^\infty \xi(H_3 - h_{22})\,d\xi \left[\lim_{\xi\to 0}\left(\xi\frac{dh_{22}}{d\xi}\right)\right]^{-1}$$

В случае (2.3) получим

$$\eta(0) = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\infty \xi\,[K_0(\omega_2\xi) + K_0(\omega_1\xi)]\,d\xi = \frac{2}{3} \tag{2.7}$$



Фиг. 2

При этом следует пользоваться равенством [3]

$$\int_0^\infty xK_0(x)\,dx = 1$$

На графике (фиг. 2) приводится кривая $\eta(\xi, \infty)$, полученная интегрированием методом Рунге—Кутта [4] уравнения (2.6) при условии (2.7).

Полученное первое приближение для η совпадает с решением задачи о движении поверхности отмеченных частиц жидкости. Если предположить, что поверхность раздела жидкостей есть геометрическое место точек, где вертикальная скорость равна нулю, то в (2.6) следует отбросить член $(d\eta/d\xi)(dh_{22}/d\xi)$ и получим формулу

$$\eta(\zeta) = \frac{K_0(\zeta) + K_0(\sqrt{3}\zeta)}{3K_0(\sqrt{3}\zeta) + K_0(\zeta)} \tag{2.8}$$

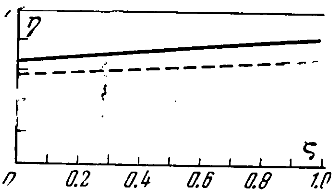
Кривая, вычисляемая по (2.8), изображена на фиг. 2 пунктирной линией.

2.2°. *Плоское движение*. В случае плоского установившегося движения система уравнений и условия будут выглядеть так:

$$\begin{gathered}\frac{d^2h_{22}}{d\xi^2} - \varepsilon_1(h_{22} - h_1) - \varepsilon_2(h_{22} - H_3) = 0\\ (1-\varepsilon_\rho)\left[\beta\frac{d^2h_1}{d\xi^2} - \varepsilon_0(h_1 - H_0)\right] - \varepsilon_1(h_1 - h_{22} + \varepsilon_\rho\eta) = 0 \qquad (2.9)\\ \eta\frac{d^2h_{22}}{d\xi^2} + \frac{dh_{22}}{d\xi}\frac{d\eta}{d\xi} - \varepsilon_2(h_{22} - H_3) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}h_1(\infty) = H_0, \qquad h_{22}(\infty) = H_3, \qquad \lim_{\xi\to0}\left(\frac{dh_1}{d\xi}\right) = 0 \qquad (2.10)\\ \lim_{\xi\to0}\left[(1-\varepsilon_\mu)\eta\frac{dh_{22}}{d\xi} + (1-\eta)\left(\frac{dh_{22}}{d\xi} - \varepsilon_\rho\frac{d\eta}{d\xi}\right)\right] = q(1-\varepsilon_\mu)\\ \eta(0) = \left(\varepsilon_2\int_0^\infty(H_3 - h_{22})\,d\xi\right)\left[\lim_{\xi\to0}\frac{dh_{22}}{d\xi}\right]^{-1}\end{gathered}$$

В случае (2.3) и $\varepsilon_\rho = 0$, определяя $h_{22}(\xi)$ и $h_1(\xi)$ из (2.9) и (2.10), получим для η следующее уравнение:



Фиг. 3

$$(1-e^{-\alpha\zeta})\frac{d\eta}{d\zeta} - (1+\sqrt{3}e^{-\alpha\zeta})\eta = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\alpha\zeta}$$

$$(\zeta = \omega_2\xi, \quad \alpha = \sqrt{3} - 1) \qquad (2.11)$$

Граничным условием будет

$$\eta(0) = {}^2/_3 \qquad (2.12)$$

Поскольку ω_2 — обычно малая величина (порядка 10^{-2} — 10^{-3} и выше), проще $\eta(\zeta)$ искать в виде ряда

$$\eta(\zeta) = {}^2/_3 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots \qquad (2.13)$$

При этом для коэффициентов ряда получаются следующие значения:

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = a_{2n} = 0$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{6}, \quad a_3 = -\frac{\alpha^3}{72}, \quad a_5 = \frac{\alpha^5}{720}, \quad a_7 = -\frac{34\alpha^7}{241920}$$

Таким образом, для достаточно широкого интервала уравнение (2.13) для ξ будет давать удовлетворительные результаты.

На фиг. 3 представлены кривая (2,13) (сплошная линия) и кривая, получаемая в случае отбрасывания произведения $(dh_{22}/d\xi)(d\eta/d\xi)$ (пунктирная линия).

Авторы благодарят П. Я. Полубаринову-Кочину за обсуждение и советы по работе.

Поступило 15 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиринский Н. К. К расчету установившегося плоского движения двух потоков подземных вод со свободной поверхностью разной минерализации. Докл. АН СССР, 1951, т. 80, № 2.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
3. Рыжик М. И. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. Госиздат, 1943.
4. Безикович Я. С. Приближенные вычисления. Гостехиздат, 1949.