О ДВИЖЕНИИ СКАЧКОВ НАСЫЩЕННОСТИ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Ю. И. СТКЛЯНИН, В. А. ТОМЕЛЬГАС

(Москва)

§ 1. Рассмотрим двухфазную фильтрацию сжимаемых жидкостей в деформируемой пористой среде при отсутствии капиллярного давления и без учета массовых сил. Для трубки тока с постоянным сечением f закон Дарси для каждой из сжимаемых фаз можно записать в виде

$$\begin{aligned} G_1(x,t) &= G_1\left(\sigma,\ p,\frac{\partial p}{\partial x}\right) = -k\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1(p)}\gamma_1(p)\frac{\partial p}{\partial x}f \\ G_2(x,t) &= G_2\left(\sigma,\ p,\frac{\partial p}{\partial x}\right) = -k\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2(p)}\gamma_2(p)\frac{\partial p}{\partial x}f \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь G_i — весовой расход i-й фазы, $k_i(\sigma)$ — относительная фазовая проницаемость i-й фазы, $\gamma_i(p)$ — объемный вес i-й фазы, $\mu_i(p)$ — вязкость i-й фазы, k — проницаемость, p — давление, σ — насыщенность одной из фаз (для определенности — второй).

Для случая одномерной фильтрации двухфазной жидкости в пористой среде, если фазы и пористая среда несжимаемы, имеется разработанная теория, основы которой изложены в работе Баклея и Леверетта [1] и в ряде других работ [2-4].

В данной работе будем считать, что объемные веса фаз, вязкости и пористость известным образом зависят от давления

$$\gamma_i = \gamma_i(p),\quad \mu_i = \mu_i(p)\quad (i = 1,2),\quad m = m(p) \tag{1.2}$$

При совместном движении двух сжимаемых жидкостей суммарный весовой расход двух фаз равен

$$G(x,t) = G\left(\sigma,p,\frac{\partial p}{\partial x}\right) = -k\left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1(p)}\gamma_1(p)+\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2(p)}\gamma_2(p)\right)\frac{\partial p}{\partial x}f \tag{1.3}$$

причем доля весового расхода второй фазы в суммарном расходе (1.3) равна

$$\Phi(p,\sigma) = \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2(p)}\gamma_2(p)\left[\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1(p)}\gamma_1(p)+\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2(p)}\gamma_2(p)\right]^{-1} = \frac{\mu(p)k_2(\sigma)}{\lambda(p)k_1(\sigma)+\mu(p)k_2(\sigma)} \tag{1.4}$$

$$\mu(p) = \frac{\mu_1(p)}{\mu_2(p)},\qquad \lambda(p) = \frac{\gamma_1(p)}{\gamma_2(p)}$$

Уравнения неразрывности будут следующими [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[G(1-\Phi)] &= -f[m(p)\gamma_1(p)(1-\sigma)] \\ \frac{\partial}{\partial x}[G\Phi] &= -f[m(p)\gamma_2(p)\sigma] \end{aligned} \tag{1.5}$$

При соответствующих начальных и граничных условиях распределение давления и насыщенностей фаз в трубке тока может быть найдено из системы уравнений (1.5).

Если пористая среда вначале занята первой фазой и вторая начинает вытеснять первую, образуется фронт вытеснения, разделяющий смесь первой и второй фаз и чистую первую фазу. Так как при насыщенности σ, меньшей так называемой «связанной» насыщенности σ^*, фазовая проницаемость $k_2(\sigma)$ равна нулю, то вторая фаза начинает движение только после того, как ее насыщенность становится больше σ^*. Поэтому существует скачок насыщенности, который будет не меньше σ^*

На фронте вытеснения, учитывая, что по обе стороны от фронта насыщенности фаз различные, существует также и скачок градиента давления $\partial p / \partial x$, который можно определить из соотношения

$$\left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1(p)} + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2(p)}\right)_0 \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1(p)} + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2(p)}\right)_+ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_+ \qquad (1.6)$$

В уравнении (1.6) и в дальнейшем нижними индексами (0) отмечены условия на фронте вытеснения со стороны смеси фаз, (+) — условия на фронте со стороны зоны однофазной фильтрации.

Выведем уравнение, позволяющее найти фронтовую насыщенность σ_0 по известной насыщенности σ, которая в общем случае может быть отличной от нуля. Уравнения (1.5) перепишем следующим образом:

$$(1-\Phi)\left[\frac{\partial G}{\partial p} y + \frac{\partial G}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right] - G\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} y\right] = -(1-\sigma)\frac{dm\gamma_1}{dp} f \frac{\partial p}{\partial t} + fm\gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\Phi\left[\frac{\partial G}{\partial p} y + \frac{\partial G}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right] + G\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} y\right] = -\sigma\frac{dm\gamma_2}{dp} f \frac{\partial p}{\partial t} - fm\gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = y$$

Рассмотрим закон движения некоторой точки $x = x(t)$. Выразим в уравнениях (1.7) производные по времени t через производные по координате x и производные по времени t в подвижной точке $x(t)$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{d\sigma}{dt} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt} - y\frac{dx}{dt} \qquad (1.8)$$

Используя (1.8), уравнения (1.7) можно представить в виде

$$\left[(1-\Phi)\frac{\partial G}{\partial \sigma} - G\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + m\gamma_1 f\frac{dx}{dt}\right]\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left[(1-\Phi)\frac{\partial G}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial x} = -(1-\sigma)\frac{dm\gamma_1}{dp} f\left(\frac{dp}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + m\gamma_1 f\frac{d\sigma}{dt} - (1-\Phi)\frac{\partial G}{\partial p} y + G\frac{\partial \Phi}{\partial p} y$$

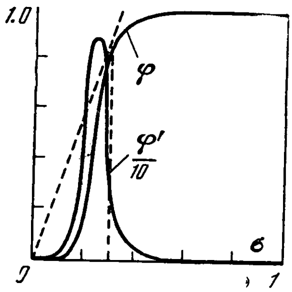
$$\left[\Phi\frac{\partial G}{\partial \sigma} + G\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - m\gamma_2 f\frac{dx}{dt}\right]\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left[\Phi\frac{\partial G}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial x} = -\sigma\frac{dm\gamma_2}{dp} f\left(\frac{dp}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) - m\gamma_2 f\frac{d\sigma}{dt} - \Phi\frac{\partial G}{\partial p} y - G\frac{\partial \Phi}{\partial p} y \qquad (1.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = y$$

Будем искать сильный разрыв насыщенности σ и градиента давления $\partial p / \partial x$ в точке $x(t)$, т. е. закон движения скачков насыщенности. Очевидно, что в этом случае основной определитель системы уравнений (1.9) должен обратиться в нуль, что дает уравнение для скорости фронта $(dx\,/\,dt)_0$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{1}{fm\,[\gamma_1\Phi + \gamma_2(1-\Phi)]_0}\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)_0 \tag{1.10}$$

Как известно, (1.10) — функция неоднозначная. Входящая в выражение (1.10) производная $\partial\Phi/\partial\sigma$ имеет вид, показанный на фиг. 1. Из уравнения (1.10) и характера функции $\partial\Phi/\partial\sigma$ следует, что две различные насыщенности могут двигаться с одинаковой скоростью и быть фронтовыми. Очевидно, что это — физически нереальная картина.



Фиг. 1

Это противоречие устраняется при выполнении условия материального баланса фаз на фронте. Баланс массы, например, второй фазы дает соотношение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(G\Phi)_0 - (G\Phi)_+ - \dfrac{\partial}{\partial x}(G\Phi)_+}{f\left[(m\gamma_2\sigma)_0 + \dfrac{\partial}{\partial t}(m\gamma_2\sigma)_0\,dt - (m\gamma_2\sigma)_+\right]} \tag{1.11}$$

которое в случае скачка насыщенности $\sigma_0 \neq \sigma_+$, т. е. на фронте вытеснения, принимает вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{(G\Phi)_0 - (G\Phi)_+}{f\,[(m\gamma_2\sigma)_0 - (m\gamma_2\sigma)_+]} \tag{1.12}$$

Для первой фазы получаем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{[G(1-\Phi)]_0 - [G(1-\Phi)]_+}{f\,[(m\gamma_1\sigma)_+ - (m\gamma_1\sigma)_0]} \tag{1.13}$$

Уравнения (1.12) и (1.13) дают выражение

$$\frac{(G\Phi)_0 - (G\Phi)_+}{\gamma_2(\sigma_0 - \sigma_+)} = -\frac{[G(1-\Phi)]_0 - [G(1-\Phi)]_+}{\gamma_1(\sigma_0 - \sigma_+)}$$

означающее непрерывность объемного дебита на фронте.

Приравнивая (1.10) и (1.12), получаем уравнение для определения величины скачка насыщенности на фронте

$$\frac{(G\Phi)_0 - (G\Phi)_+}{\gamma_2(\sigma_0 - \sigma_+)} = \frac{(\partial\Phi\,/\,\partial\sigma)_0}{\gamma_1\Phi(\sigma_0) + \gamma_2(1 - \Phi(\sigma_+))} \tag{1.14}$$

После преобразований уравнение (1.14) принимает следующий вид

$$\frac{\varphi_*(\sigma_0) - \varphi_*(\sigma_+)}{\sigma_0 - \sigma_+} = \varphi_*'(\sigma_0) \tag{1.15}$$

где

$$\varphi_* = \varphi_*(p, \sigma) = \frac{\mu(p)\,k_2(\sigma)}{k_1(\sigma) + \mu(p)\,k_2(\sigma)}, \quad \mu(p) = \frac{\mu_1(p)}{\mu_2(p)} \tag{1.16}$$

Уравнение (1.15) отличается от соответствующего уравнения Баклея — Леверетта только тем, что входящее в него отношение вязкостей (1.16) является функцией давления и берется при давлении p_0 на фронте вытеснения. При $\mu = \mathrm{const}$

$$\varphi_*(\sigma, p) = \varphi(\sigma) = \frac{\mu k_2(\sigma)}{k_1(\sigma) + \mu k_2(\sigma)} \tag{1.17}$$

переходит в известную функцию Баклея — Леверетта, характер которой показан на фиг. 1. Если $\sigma_+ = 0$, то (1.15) принимает вид

$$\varphi'(\sigma_0)\,\sigma_0 = \varphi(\sigma_0) \tag{1.18}$$

Таким образом (если $\mu = \mathrm{const}$), на фронте вытеснения при фильтрации сжимаемых фаз в деформируемой пористой среде существует стационарный скачок насыщенностей. Соображения о движении скачков насыщенности, известные из теории Баклея — Леверетта [1], и условия на фронте вытеснения [1,2-4] получают обобщение на случай движения сжимаемых фаз. Вышеизложенное остается верным и в случае плоскорадиального течения или фильтрации в трубке тока переменного сечения.

§ **2.** Рассмотрим задачу о нагнетании газа в неограниченный, не возмущенный вначале водоносный пласт через прямолинейную галерею. Индекс (1) теперь будет относиться к воде, индекс (2) — к газу.

В процессе закачки газа пласт разделится на две зоны. В первой зоне, прилегающей к нагнетательной галерее, будет находиться газо-водяная смесь, уравнения фильтрации которой при соответствующих предположениях могут быть записаны в виде (1.5). Во второй зоне, водоносной, движение будем считать подчиняющимся основному уравнению упругого режима [6]

$$\frac{k}{\mu_1 m}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.1}$$

Пусть в начальный момент времени пласт невозмущен, давление в нем всюду постоянно, $p(x, 0) = p_\infty = \mathrm{const}$, и при закачке газа на галерее поддерживается постоянное давление, $p(0, t) = p_0 = \mathrm{const}$. Давление на бесконечности в процессе закачки газа остается равным первоначальному пластовому давлению, $p(\infty, t) = p_\infty = \mathrm{const}$.

Как известно [7], в этом случае движение будет автомодельным, и замена

$$\zeta = x / 2\sqrt{at} \qquad (a = kK / m^\circ\mu_1)$$

(K — модуль совместной упругости воды и пористой среды) позволяет поставленную задачу записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\zeta}[k_1\gamma_1^* y] = -2\zeta\frac{d}{d\zeta}[m^*\gamma_1^*(1-\sigma)] \\ \frac{d}{d\zeta}[\mu k_2\gamma_2^* y] = -2\zeta\frac{d}{d\zeta}[m^*\gamma_2^*\sigma], \qquad \frac{dp^*}{d\zeta} = y\end{gathered} \qquad (0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0) \tag{2.2}$$

$$\frac{d_1 p^*}{d\zeta^2} = -2\zeta\frac{dp^*}{d\zeta} \qquad (\zeta_0 \leqslant \zeta < \infty) \tag{2.3}$$

$$p = Kp^*, \quad \gamma_{1,2} = \gamma_{1,2}^\circ\gamma_{1,2}^*, \qquad m = m^\circ m^*$$

Здесь $\gamma_{1,2}^\circ$ и m° — объемные веса и пористость при давлении p_0 на границе раздела.

Учитывая, что во всей водоносной зоне, согласно условиям задачи, газонасыщенность равна нулю, фронтовая насыщенность на границе ζ_0 со стороны газо-водяной смеси должна определяться из уравнения (1.18)

$$\varphi'(\sigma_0)\,\sigma_0 = \varphi(\sigma_0) \tag{2.4}$$

Из аналитического решения уравнения (2.3) и соблюдения на границе раздела условия непрерывности объемного расхода смеси следует, что давление в водоносной зоне $\zeta_0 \leqslant \zeta < \infty$ распределено следующим образом:

$$p^* = p_\infty^* + \frac{2\zeta_0 \exp\zeta_0^2}{\varphi'(\sigma_0)}\int\limits_\zeta^\infty \exp\zeta^2\,d\zeta \tag{2.5}$$

Здесь $\varphi'(\sigma_0)$ — производная от функции Баклея — Леверетта (1.17), взятая при значении фронтовой насыщенности σ_0. В частности, на границе раздела ζ_0

$$p^* = p_\infty^* + \frac{2\zeta_0 \exp\zeta_0^2}{\varphi'(\sigma_0)}\int\limits_{\zeta_0}^\infty \exp\zeta^2\,d\zeta \tag{2.6}$$

Из (2.5) и связи между градиентами давлений на фронте справа и слева (1.6) следует еще одно условие на границе

$$y_0 = \left(\frac{dp^*}{d\zeta}\right)_0 = -\frac{2\zeta_0}{\varphi'(\sigma_0)(k_1+\mu k_2)_0} \tag{2.7}$$

Для простоты будем считать в дальнейшем в зоне смеси воду несжимаемой, пористую среду недеформируемой, газ сжимаемым по закону

$$\gamma_2 = cp^* \tag{2.8}$$

В таком случае уравнения (2.2) фильтрации в зоне смеси перепишутся так:

$$(k_1'y - 2\zeta)\frac{d\sigma}{d\zeta} + k_1\frac{dy}{d\zeta} = 0$$

$$p^*(\mu k_2 y + 2\zeta)\frac{d\sigma}{d\zeta} + p^*\mu k_2\frac{dy}{d\zeta} = -y(\mu k_2 y + 2\zeta\sigma) \qquad \frac{dp^*}{d\zeta} = y \tag{2.9}$$

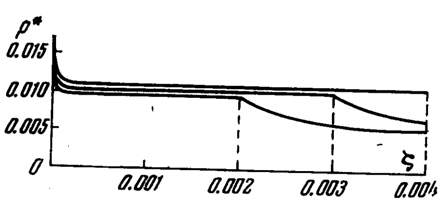
Из-за сделанных ранее допущений при граничных условиях (2.4), (2.6) и (2.7), т. е. на фронте ζ_0, система (2.9) оказывается неопределенной (пропорциональны коэффициенты первых двух уравнений). Поэтому из системы (2.9) следует только

$$\left(\frac{dp^*}{d\zeta}\right)_0 = y_0, \qquad \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)_0 = 2\zeta_0\frac{(k_1' + \mu k_2')_0}{\mu(k_2'k_1 - k_1'k_2)}\left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 \tag{2.10}$$

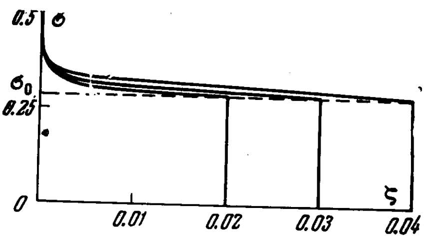
Линейная комбинация дифференцированных по ζ первых двух уравнений (2.9) (с учетом пропорциональности коэффициентов при производных, и, следовательно,— при вторых производных в дифференцированных уравнениях) позволяет найти значение производной $(d\sigma / d\zeta)_0$ в точке ζ_0 со стороны зоны смеси

$$\left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 = \frac{\varphi(\sigma_0)}{2\zeta_0\varphi''(\sigma_0)}\left[1 + \left(1 - 8\frac{\zeta_0^2\varphi''(\sigma_0)\sigma_0(1-\varphi(\sigma_0))}{\varphi'^2(\sigma_0)p_0^*(\mu k_2 - k_1)_0}\right)^{1/2}\right] \tag{2.11}$$

Граничные значения функций p_0^* (2.6), y_0 (2.7), σ_0 (2.4) и их производных y_0, $(dy / d\zeta)_0$ (2.10), и $(d\sigma / d\zeta)_0$ (2.11) позволяют «выйти» из точки ζ_0, в которой система уравнений (2.2) не определена. После выхода из ζ_0 в близлежащую точку ζ_0' интегрирование (2.2) не представляет трудностей.



Фиг. 2



Фиг. 3

Численные расчеты этой задачи были выполнены при следующих параметрах: $p_\infty = 34$ *ат*, $\mu = 100$, $K = 7400$ *кГ/см*^{2}, $m = 0.2$, фазовые проницаемости для воды и газа были взяты из работы [8].

Расчеты показали, что давление и насыщенность фаз во всей зоне газо-водяной смеси остаются почти постоянными. Это подтверждает возможность в приближенных расчетах, связанных с закачками газа в водоносные пласты, полагать постоянными газонасыщенность и давление по всей площади газоносности.

Результаты расчетов, проведенных при указанных параметрах и фазовых проницаемостях, но для случая плоско-радиального течения (нагнетание газа в водоносный пласт через одиночную скважину), приведены на фиг. 2 (газонасыщенность в зоне смеси) и фиг. 3 (давление в пласте).

Поступило 8 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Bucley I., Leverett M. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. Trans AFME, 1952, vol. 146.
2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. Изд-во «Мир», 1964.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1961.
4. Бузинов С. Н., Чарный И. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, № 7.
5. Muskat M. Phisical Prinsiple of Oil Production. New York, 1949.
6. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
7. Розенберг М. Д. Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложение в теории фильтрации. Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 2.
8. Чень Чжун-сян. Некоторые вопросы фильтрации двухфазной жидкости в пористой среде. Тр. Моск. ин-та нефтехимической и газовой пром-сти им. Губкина, 1961, вып. 33.