

О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Р. А. ГРУНТФЕСТ, А. К. НИКИТИН

(Ростов-на-Дону)

В работе исследуется сопротивление, которое встречает система нормальных напряжений при своем прямолинейном движении вдоль поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. Задача решается в линейной постановке, т. е. предполагается, что амплитуды возникающих волн малы и волны пологие. В общем случае в замкнутой форме получено решение для плоской и пространственной задач. В плоской задаче подробно исследован случай, когда на отрезке длиной $2l$ задано постоянное давление p_0 , перемещающееся с постоянной скоростью U . В пространственной задаче изучен случай, когда нормальное напряжение сосредоточено на отрезке прямой длиной $2l$, которым можно заменить корабль, движущийся по прямому курсу с постоянной скоростью U . Получающиеся в обоих случаях интегралы исследуются методом стационарной фазы, применение которого для трехмерных интегралов по объему с границами обосновывается в § 1 предлагаемой работы. В результате получены формулы для волнового сопротивления в плоском (§ 2) и пространственном (§ 3) случаях.

§ 1. Метод стационарной фазы для одномерных и двумерных интегралов в ограниченных и неограниченных областях обоснован в работах [1,2]. Для многомерных интегралов этот метод обоснован только для случая областей без границ [3].

Ввиду того что в данной работе будут встречаться трехмерные интегралы по объему с границей, приведем обоснование метода стационарной фазы для таких интегралов. Пусть дан интеграл

$$I = \int_{\Omega} F(x, y, z) \exp(ik\Phi(x, y, z)) dx dy dz \quad (1.1)$$

Здесь k — большой положительный параметр, F и Φ — вещественные и непрерывные в замкнутом объеме Ω функции, имеющие непрерывные частные производные соответственно до второго и третьего порядков; функция Φ имеет внутри объема Ω (исключая границу S) одну стационарную точку. В стационарной точке гессиан Δ функции Φ отличен от нуля. Представим интеграл (1.1) в виде

$$I = \int_{\Omega} F \exp(ik\Phi) d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_0} F \exp(ik\Phi) d\Omega \quad (1.2)$$

где Ω_0 — небольшой шаровой объем с поверхностью S_0 и центром в стационарной точке. Используя во втором интеграле тождество

$$e^{ik\Phi} = \frac{1}{ik(\mathbf{q} \cdot \text{grad } \Phi)} (\mathbf{q} \cdot \text{grad } e^{ik\Phi}) \quad (1.3)$$

где \mathbf{q} — произвольный вектор, удовлетворяющий условию $\mathbf{q} \cdot \text{grad } \Phi \neq 0$, и применяя к нему формулу интегрирования по частям [4], получим

$$I = \int_{\Omega_0} F e^{ik\Phi} d\Omega - \frac{1}{ik} \left[\int_{\Omega - \Omega_0} \text{div} \left(\frac{F \mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \text{grad } \Phi} \right) e^{ik\Phi} d\Omega - \int_S \frac{F(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \text{grad } \Phi)} e^{ik\Phi} dS + \int_{S_0} \frac{F(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \text{grad } \Phi)} e^{ik\Phi} dS \right] \quad (1.4)$$

где \mathbf{n}° и \mathbf{r}° — единичные векторы внешних нормалей соответственно к границе объема S и сфере S_0 . Последний интеграл удобно записать

в сферических координатах r, φ, θ . Далее устремим радиус r шара Ω_0 к нулю. Так как F ограничено, то интеграл по Ω_0 стремится к нулю. Получим

$$I = -\frac{1}{ik} \left[\int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{F\mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi} \right) e^{ik\Phi} d\Omega - \int_S \frac{F(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi)} e^{ik\Phi} dS + \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{F(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi)} e^{ik\Phi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \right] \quad (1.5)$$

Пользуясь произвольностью вектора \mathbf{q} , положим в интеграле по сфере $\mathbf{q} = \mathbf{r}^\circ$. Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$\frac{F(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi)} r^2 \sin \theta = \frac{F}{\partial \Phi / \partial r} r^2 \sin \theta$$

В окрестности стационарной точки имеем $d\Phi / dr \sim O(r)$ при $r \rightarrow 0$, поэтому предел в правой части выражения (1.5) будет равен нулю.

Рассмотрим интеграл

$$J = I_1 + I_2 = \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \left(\frac{F\mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi} \right) e^{ik\Phi} d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_0} \operatorname{div} \left(\frac{F\mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi} \right) e^{ik\Phi} d\Omega \quad (1.6)$$

Перейдем в интеграле I_1 к сферическим координатам и опять положим $\mathbf{q} = \mathbf{r}^\circ$. Получим

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F r^2}{\partial \Phi / \partial r} \right) e^{ik\Phi} \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1.7)$$

Нетрудно показать, что подынтегральная функция в (1.7) непрерывна, конечна и отлична от нуля при $r = 0$. Поэтому для интегрирования по r можно применить метод стационарной фазы для одномерных интегралов [1]. Выполняя затем точное интегрирование по θ и φ , придем к формуле

$$I_1 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{k^{1/2} |\Delta|^{1/2}} F^\circ e^{i(k\Phi_c^\circ \pm 1/4\pi)} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.8)$$

где Δ — гессиан функции Φ , вычисленный в стационарной точке, причем знак слагаемого $\pm 1/4 \pi$ совпадает со знаком Δ .

Рассмотрим интеграл I_2 . Полагая в нем

$$\operatorname{div} \left(\frac{F\mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi} \right) = F_1$$

и пользуясь тождеством (1.3) и формулой интегрирования по частям, найдем

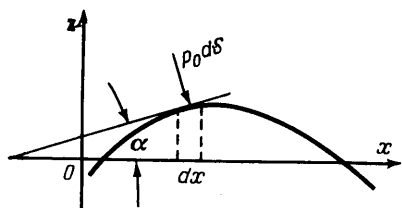
$$I_2 = -\frac{1}{ik} \left[\int_{\Omega - \Omega_0} \operatorname{div} \frac{F_1 \mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi} e^{ik\Phi} d\Omega - \int_{S+S_0} \frac{F_1(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi)} e^{ik\Phi} dS \right] \quad (1.9)$$

В силу условий, наложенных на функции F и Φ , подынтегральные выражения остаются конечными в области интегрирования (включая границу). Отсюда следует, что $I_2 \sim O(k^{-1})$. Это приводит для интеграла (1.1) к асимптотической формуле

$$I = -\frac{1}{ik} \left[\frac{(2\pi)^{3/2}}{k^{1/2} |\Delta|^{1/2}} F^\circ e^{i(k\Phi^\circ \pm 1/4\pi)} - \int_S \frac{F(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^\circ)}{(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \Phi)} e^{ik\Phi} dS + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \quad (1.10)$$

Отметим, что если функция Φ на границе или на некотором ее участке постоянна, то внеинтегральный член в формуле (1.10) будет мал по сравнению с поверхностным интегралом, который в данном случае определяет порядок интеграла (1.1). В противном случае поверхностный интеграл даже при наличии стационарных точек у функции Φ , зависящей теперь от двух переменных, будет иметь порядок $O(k^{-2})$ (это следует из работы [2]), который совпадает с порядком отбрасываемых величин.

§ 2. Волновое сопротивление в плоском случае. Направим ось x по горизонтали, совпадающей с невозмущенной поверхностью жидкости, а ось z — вертикально вверх. Пусть к поверхности жидкости приложено произвольное нормальное напряжение $p_0(x, t)$. Для определения сопротивления, оказываемого жидкостью, рассмотрим элемент свободной поверхности dS . На него действует сила $p_0(x, t)dS$, направленная внутрь жидкости (фиг. 1). Со стороны поверхности жидкости будет действовать равная и противоположно направленная реакция. Проектируя эти силы на ось x , получим выражение элементарного волнового сопротивления



Фиг. 1

$$-dR = p_0(x, t) \sin \alpha dS = p_0(x, t) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$$

где $z = \eta(x, t)$ — уравнение свободной поверхности. Проинтегрировав по x , найдем силу волнового сопротивления

$$R = - \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, t) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

В работах [5, 6] была решена задача о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины, вызываемых из состояния покоя произвольным нормальным напряжением $p_0(x, y, t)$. Для возвышения свободной поверхности в плоском случае получена формула (начальное смещение свободной поверхности предполагается отсутствующим)

$$\eta(x, t) = - \frac{1}{\mu \sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\xi, t - \tau) \Psi(|\xi|, \tau) e^{-i\xi x} d\xi d\tau \quad (2.2)$$

Здесь $P_0(\xi, t)$ — трансформанта Фурье для напряжения $p_0(x, t)$

$$\Psi(\xi, t) = - \frac{\xi^3}{\xi^4 + \lambda^3 \xi} + \sum_{m=1}^4 \frac{1}{4v_m(v_m^3 + v_m - 1)} \xi \times \\ \times \{v_m^2 \operatorname{erfc}(-\xi v_m \sqrt{vt}) e^{v t \xi^2 (v_m^2 - 1)} - v_m \operatorname{erf}(\xi \sqrt{vt}) - 1\}$$

$$M(v_m) = v_m^4 + 2v_m^2 - 4v_m + 1 + \lambda^3 \xi^{-3} = 0, \quad \lambda^3 = gv^{-2}$$

Это выражение можно упростить, если воспользоваться следующими соотношениями, вытекающими из второй теоремы разложения:

$$\frac{1}{v^4 + 2v^2 - 4v + 1 + \lambda^3 \xi^{-3}} = \frac{1}{1 + \lambda^3 \xi^{-3}} + \sum_{m=1}^4 \frac{1}{4v_m(v_m^3 + v_m - 1)} \frac{v}{v - v_m} \\ \frac{v}{v^4 + 2v^2 - 4v + 1 + \lambda^3 \xi^{-3}} = \sum_{m=1}^4 \frac{1}{4(v_m^3 + v_m - 1)} \frac{v}{v - v_m}$$

Переходя к пределу при $|v| \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{1}{1 + \lambda^3 \xi^{-3}} + \sum_{m=1}^4 \frac{1}{4v_m(v_m^3 + v_m - 1)} = 0, \quad \sum_{m=1}^4 \frac{1}{4(v_m^3 + v_m - 1)} = 0$$

Теперь $\Psi(\xi, t)$ можно записать в виде

$$\Psi(\xi, t) = \sum_{m=1}^4 \frac{v_m}{4\xi(v_m^3 + v_m - 1)} e^{v t \xi^2 (v_m^2 - 1)} \operatorname{erfc}(-\xi v_m \sqrt{vt}) \quad (2.3)$$

Дифференцируя выражение (2.2) по x и подставляя результат в формулу (2.1), найдем после перемены порядка интегрирования

$$R = -\frac{1}{\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\xi, t-\tau) P_0^*(\xi, \tau) \Psi(|\xi|, \tau) i\xi d\xi d\tau \quad (2.4)$$

$$P_0(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, t) e^{i\xi x} dx, \quad P_0^*(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, t) e^{-i\xi x} dx \quad (2.5)$$

Пусть внешнее напряжение представляет собой систему нормальных напряжений, перемещающуюся без изменения вдоль положительного направления оси x по известному закону

$$p_0(x, t) = f[x - S(t)]$$

где $x = S(t)$ — закон движения, а $f(x)$ — закон распределения напряжений при $t = 0$. Тогда, производя в интегралах (2.5) замену $x - S(t) = x'$, найдем волновое сопротивление в виде

$$R = -\frac{1}{\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^*(\xi) \Psi(|\xi|, \tau) i\xi e^{-i\xi[S(t)-S(t-\tau)]} d\xi d\tau \quad (2.6)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad F^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Формула (2.6) позволяет решать задачу о нахождении волнового сопротивления в общем случае. Рассмотрим случай, когда постоянное напряжение, заданное на отрезке длиной $2l$, равномерно перемещается со скоростью U , т. е.

$$f(x) = \begin{cases} Q, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l, \end{cases} \quad S(t) = Ut, \quad F(\xi) F^*(\xi) = \frac{2Q^2}{\pi\mu} \frac{\sin^2 \xi l}{\xi^2}$$

$$R = -\frac{2iQ^2}{\pi\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi l}{\xi} \Psi(|\xi|, \tau) e^{-i\xi U\tau} d\xi d\tau \quad (2.7)$$

Используя симметрию функции Ψ по ξ , получим

$$R = -\frac{4Q^2}{\pi\mu} \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi l}{\xi} \Psi(\xi, \tau) \sin(U\tau\xi) d\xi d\tau \quad (2.8)$$

Значительно удобнее вычислять производную

$$\frac{dR}{dl} = -\frac{4Q^2}{\pi\mu} \int_0^t \int_0^{\infty} \Psi(\xi, \tau) \sin(2\xi l) \sin(U\tau\xi) d\xi d\tau \quad (2.9)$$

Предполагая применить для асимптотической оценки интеграла (2.9) метод стационарной фазы, запишем (2.9) в виде

$$\text{где} \quad \frac{dR}{dl} = R_1 - R_2 \quad (2.10)$$

$$R_s = -\frac{2Q^2}{\pi\mu} \int_0^t \int_0^{\infty} \Psi(\xi, \tau) \cos \xi (U\tau - (-1)^s 2l) d\xi d\tau \quad (s=1, 2) \quad (2.11)$$

Следуя работе [5], сделаем в интеграле (2.11) замену

$$\xi = -\lambda(v_m^4 + 2v_m^2 - 4v_m + 1)^{-1/3}, \quad \tau = 2l\tau' / U \quad (2.12)$$

Здесь τ' — безразмерная переменная. Смысл замены (2.12) состоит в переходе от интегрирования по переменной ξ к интегрированию по корням v_m полинома $M(v)$. в результате чего отпадает необходимость аналитического нахождения корней v_m как функций параметра ξ . Подробный разбор этой замены дан в работе [5]. Указанная замена приводит к интегралам

$$R_s = \frac{Q^2 k}{\pi \mu \lambda U} (-J_1 - J_2 + J_3 + J_4 + J_5 - J_6) \quad (2.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{0.6823}^{\infty} \int_0^t F_1(a, \tau) e^{ik\Phi_1(a, \tau)} da d\tau + \int_{0.6823}^{\infty} \int_0^t F_1(a, \tau) e^{ik\Phi_2(a, \tau)} da d\tau \quad (2.14) \\ J_2 &= \int_{0.6823}^{\infty} \int_0^t F_1^*(a, \tau) e^{ik\Phi_3(a, \tau)} da d\tau + \int_{0.6823}^{\infty} \int_0^t F_1^*(a, \tau) e^{ik\Phi_4(a, \tau)} da d\tau \\ J_3 &= \int_{0.6478}^{\infty} \int_0^t F_1(-a, \tau) e^{ik\Phi_1(-a, \tau)} da d\tau + \int_{0.6478}^{\infty} \int_0^t F_1(-a, \tau) e^{ik\Phi_2(-a, \tau)} da d\tau \\ J_4 &= \int_{0.6478}^{\infty} \int_0^t F_1^*(-a, \tau) e^{ik\Phi_3(-a, \tau)} da d\tau + \int_{0.6478}^{\infty} \int_0^t F_1^*(-a, \tau) e^{ik\Phi_4(-a, \tau)} da d\tau \\ J_5 &= \int_{0.6823}^1 \int_0^t F_2(v, \tau) e^{ik\Phi_5(v, \tau)} dv d\tau + \int_{0.6823}^1 \int_0^t F_2(v, \tau) e^{ik\Phi_6(v, \tau)} dv d\tau \\ J_6 &= \int_{0.2956}^{\infty} \int_0^t F_2(v, \tau) e^{ik\Phi_5(v, \tau)} dv d\tau + \int_{0.2956}^{\infty} \int_0^t F_1(v, \tau) e^{ik\Phi_6(v, \tau)} dv d\tau \end{aligned}$$

а подынтегральные функции имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} F_1(a, \tau) &= \frac{h^3(a)}{3} (a + ib) \left(1 + i \frac{ab}{da}\right) \operatorname{erfc} [-(a + ib) h(a) \sqrt{k\tau\delta}] \times \\ &\quad \times \exp [(a^2 - b^2 - 1) h^2(a) k\tau\delta] \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(v, \tau) &= \frac{v \xi^3(v)}{3\lambda^2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{\xi(v)}{\lambda} v \sqrt{k\tau\delta}\right) \exp \left[\frac{\xi^2(v)}{\lambda^2} (v^2 - 1) k\tau\delta\right] \\ \Phi_1(a, \tau) &= 2\delta abh^2(a)\tau + h(a)(1 \pm \tau) \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\Phi_2(a, \tau) = 2\delta abh^2(a)\tau - h(a)(1 \pm \tau)$$

$$\Phi_3(a, \tau) = -2\delta abh^2(a)\tau + h(a)(1 \pm \tau)$$

$$\Phi_4(a, \tau) = -2\delta abh^2(a)\tau - h(a)(1 \pm \tau)$$

$$\Phi_5(v, \tau) = \frac{\xi(v)}{\lambda} (1 \pm \tau), \quad \Phi_6(v, \tau) = -\frac{\xi(v)}{\lambda} (1 \pm \tau) \quad (2.17)$$

$$b = \left(a^2 + 1 - \frac{1}{a}\right)^{1/2}, \quad k = 2l\lambda, \quad \delta = \frac{\lambda v}{U}, \quad h(a) = \left(\frac{a^2}{4a^6 + 4a^4 - 1}\right)^{1/2}$$

При $s = 1$ в формулах (2.13), (2.14), (2.16) и (2.17) нужно брать верхний знак, при $s = 2$ — нижний. Функция F_1^* — комплексно сопряженная с функцией F_1 .

К интегралам (2.14) применяем метод стационарной фазы в том виде, в каком он дан в работе [2]. Как видно из выражений (2.14), приближение, даваемое указанным методом, будет хорошим, если $k \gg 1$. Переходя к нахождению стационарных точек функций (2.16), лежащих внутри области интегрирования, получим для их определения системы

$$2abh(a)\delta \pm 1 = 0, \quad [2abh^2(a)]' \tau \delta \pm h'(a)(1 \pm \tau) = 0 \quad (2.18)$$

Первое уравнение определяет координату a стационарной точки. Для его разрешения относительно a удобно воспользоваться формулой обращения Лагранжа [8]. После того как координата a° найдена, значение координаты τ° определится из второго уравнения. Вычисление координат стационарных точек проводилось¹ с точностью до $O(\delta^3)$.

Первое уравнение системы (2.18) после подстановки в него значений b и $h(a)$ приводится к виду

$$64a^7 (a^3 + a - 1)^3 \delta^6 = (4a^6 + 4a^4 - 1)^2$$

Поэтому для малых значений δ его решение можно искать в виде

$$a = 0.6478 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta^{3k}$$

где 0.6478 — корень полинома $4a^6 + 4a^4 - 1$.

Можно координаты стационарных точек определять графически более точно, построив график функции $\delta = \delta(a)$.

Дальнейшие действия сводятся к применению формулы [2]

$$\begin{aligned} & \iint_S F(x, y) e^{ik\Phi(x, y)} dx dy = \\ & = -\frac{1}{ik} \left[\frac{2\pi}{|\Delta|^{1/2}} F^\circ e^{ik\Phi^\circ} - \int_{\Gamma} \frac{F \partial \Phi / \partial n}{(\text{grad } \Phi)^2} e^{ik\Phi} dl \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь $\Delta \neq 0$ — гессиян функции Φ , вычисленный в стационарной точке, лежащей строго внутри области интегрирования S ; Γ — граница области; n — внешняя нормаль к границе. Полученные результаты относительно стационарных точек позволяют вычислить внеинтегральный член с точностью до $O(\delta^3)$. Если рассматривать установившееся сопротивление, которое получается при $t \rightarrow \infty$, то, согласно [2], контурный интеграл будет иметь порядок $O(k^{-2})$, что совпадает с порядком отбрасываемых величин. В результате находим

$$R_1 \sim O(k^{-2}), \quad R_2 = \frac{4Q^2}{\rho U^2} e^{-\varepsilon l} \sin \frac{2gl}{U^2} [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}), \quad \varepsilon = \frac{4\nu g^2}{U^5}$$

Из формулы (2.10) с учетом (2.20) имеем

$$\frac{dR}{dl} = -\frac{4Q^2}{\rho U^2} e^{-\varepsilon l} \sin \frac{2gl}{U^2} [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}) \quad (2.21)$$

Отсюда, принимая во внимание, что $R = 0$ при $l = 0$, находим

$$\begin{aligned} R = & -\frac{4Q^2}{\rho U^2 (\varepsilon^2 + 4g^2 / U^4)} \left(\frac{2g}{U^2} - \varepsilon e^{-\varepsilon l} \sin \frac{2gl}{U^2} - \right. \\ & \left. - \frac{2g}{U^2} e^{-\varepsilon l} \cos \frac{2gl}{U^2} \right) [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Эта формула дает искомое волновое сопротивление в вязкой жидкости. При $\nu \rightarrow 0$ имеем $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ и формула (2.22) принимает вид

$$R = -\frac{4Q^2}{\rho g} \sin^2 \frac{gl}{U^2} \quad (2.23)$$

что совпадает с соответствующим выражением для идеальной жидкости. Знак минус в формулах (2.22), (2.23) показывает, что волновое сопротивление направлено против движения источника возмущений. Изменение отношения $R^* = |R| \rho g / 2 Q^2$ в зависимости от $l^* = 2gl / U^2$ представлено на фиг. 2. Из выражения (2.21) находим, что волновое сопротивление имеет минимум

$$|R|_{\min} \approx \frac{8gQ^2}{\rho U^4 (\varepsilon^2 + 4g^2/U^4)} \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon h \pi U^2}{g}\right) \right] \quad \text{при } \frac{gl}{U^2} = n\pi$$

максимум

$$|R|_{\max} \approx \frac{8gQ^2}{\rho U^4 (\varepsilon^2 + 4g^2/U^4)} \left[1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon(n + 1/2)\pi U^2}{g}\right) \right] \quad \text{при } \frac{gl}{U^2} = (n + 1/2)\pi$$

Пунктирной линией на фиг. 2 показан соответствующий график для идеальной жидкости.

§ 3. Для изучения пространственного аналога формулы (2.4) рассмотрим силы, действующие на элемент поверхности $d\sigma$. На него действует сила $P_0(x, y, t)d\sigma$, направленная по нормали внутрь жидкости, а со стороны поверхности жидкости действует равная и противоположная реакция dR (фиг. 3). Проектируя эти силы на оси x и y , получим

$$-dR_x = p_0(x, y, t) \cos(nx)d\sigma, \quad -dR_y = p_0(x, y, t) \cos(ny)d\sigma$$

Учитывая, что

$$\cos(nx) d\delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy, \quad \cos(ny) d\delta = \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy$$

и интегрируя по всей поверхности жидкости, получим

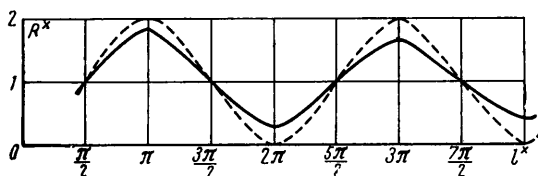
$$R_x = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, y, t) \frac{\partial \xi}{\partial x} dx dy, \quad R_y = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, y, t) \frac{\partial \xi}{\partial y} dx dy \quad (3.1)$$

Здесь $z = \xi(x, y, t)$ — уравнение свободной поверхности.

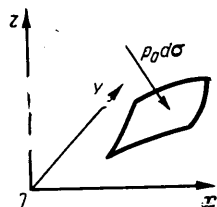
В работе [6] находим для возвышения свободной поверхности, вызываемого произвольным внешним нормальным напряжением $p_0(x, y, t)$, выражение

$$\xi(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\xi, \eta, t-\tau) \Psi(r, \tau) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta d\tau \quad (3.2)$$

Здесь $P_0(\xi, \eta, t)$ — двумерная трансформата Фурье для напряжения p_0 . Функция $\Psi(r, t)$ дается формулой (2.3); $r = (\zeta^2 + \eta^2)^{1/2}$. Предполагается, что движение начинается из состояния покоя и начальное смещение свободной поверхности отсутствует.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если внешнее напряжение представляет собой систему нормальных напряжений, перемещающуюся как твердое тело вдоль оси x и симметричную относительно этой оси, то ясно, что $R_y \equiv 0$, а для R_x после проведения операций, аналогичных тем, которые были сделаны в плоском слу-

чае, придем к выражению

$$R = -\frac{i}{\mu} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) F^*(\xi, \eta) \Psi(r, \tau) \xi e^{-i\xi[S(t)-S(t-\tau)]} d\xi d\eta d\tau \quad (3.3)$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy,$$

$$F^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

Здесь $x = S(t)$ — закон движения системы нормальных напряжений, $af(x, y)$ — закон распределения нормальных напряжений при $t = 0$.

Рассмотрим случай равномерного движения со скоростью U напряжения, распределенного по закону

$$f(x, y) = \begin{cases} Q\delta(y) & \text{при } |x| \leq l, \\ 0 & \text{при } |x| > l, \end{cases} \quad S(t) = Ut$$

Формула (3.3) приводит в рассматриваемом случае к следующему выражению для волнового сопротивления:

$$R_x = -\frac{iQ^2}{\mu\pi^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi l}{\xi} \Psi(r, \tau) e^{-i\xi U\tau} d\xi d\eta d\tau \quad (3.4)$$

Здесь, как и в плоской задаче, удобнее искать производную

$$\frac{dR_x}{dl} = -\frac{iQ^2}{\mu\pi^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(r, \tau) \sin 2\xi l e^{-i\xi U\tau} d\xi d\eta d\tau \quad (3.5)$$

Совершая переход к полярным координатам r и θ , получим

$$\frac{dR_x}{dl} = -\frac{4Q^2}{\mu\pi^2} \int_0^t \int_0^{1/2\pi} \int_0^{\infty} \Psi(r, \tau) \sin(2lr \cos \theta) \sin(U\tau r \cos \theta) r dr d\theta d\tau \quad (3.6)$$

Далее, запишем интеграл (3.5) в виде

$$\frac{dR_x}{dl} = R_1 - R_2, \quad R_{1,2} = -\frac{2Q^2}{\mu\pi^2} \int_0^t \int_0^{1/2\pi} \int_0^{\infty} r \Psi(r, \tau) \cos[r \cos \theta (U\tau \pm 2l)] dr d\theta d\tau$$

Аналогично плоской задаче сделаем замену

$$r = -\lambda(v_m^4 + 2v_m^2 - 4v_m + 1)^{1/3}, \quad v = a + ib, \quad \tau = 2l\tau^1 / U \quad (3.7)$$

После чего придем к интегралам

$$R_{1,2} = \frac{Q^2 k}{\pi^2 \mu \lambda U} (-J_1 - J_2 + J_3 + J_4 + J_5 - J_6) \quad (3.8)$$

Получающиеся интегралы отличаются от соответствующих интегралов (2.13) в плоской задаче наличием дополнительного интегрирования по θ и некоторым изменением функций (2.16), что хорошо видно при сравнении интегралов (2.11) и (3.6). Применим к интегралам метод стационарной фазы в форме, данной в § 1. Стационарные точки определяются из систем

$$\sin \theta = 0, \quad 2abh(a)\delta \pm \cos \theta = 0, \quad [2abh^2(a)]'\tau\delta \pm h'(a)(1 \pm \tau)\cos \theta = 0$$

Первое уравнение дает $\theta_1^0 = 0, \theta_2 = \pi$. После этого остальные уравнения образуют системы, в точности совпадающие с системами (2.18).

Далее воспользуемся формулой (1.10). Если рассматривать установившуюся задачу, то поверхностный интеграл будет иметь порядок отбра-

сываемых величин. Результаты относительно стационарных точек позволяют вычислить внеинтегральный член с точностью до $O(\delta^3)$. Опуская громоздкие выкладки, получим

$$R_2 = \frac{Q^2 g^{1/2}}{\rho (\pi l)^{1/2} U^3} e^{-\varepsilon l} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2gl}{U^2}\right) [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}) \quad (3.9)$$

$$R_1 \sim O(k^{-2}), \quad \varepsilon = 4\nu g^2 / U^5, \quad k = 2\lambda, \quad \delta = \lambda\nu / U$$

Из (3.6) с учетом (3.9) находим

$$\frac{dR_x}{dl} = - \frac{Q^2 g^{1/2}}{\rho (\pi l)^{1/2} U^3} l^{-\varepsilon l} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2gl}{U^2}\right) [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}) \quad (3.10)$$

Отсюда

$$R_x = R = - \frac{Q^2 g^{1/2}}{\sqrt{\pi} \rho U^3} \int_0^l l^{-1/2} \exp(-\varepsilon l) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2gl}{U^2}\right) dl [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}) \quad (3.11)$$

Этот интеграл выражается через интеграл вероятности [9]

$$R = - \frac{\sqrt{2} Q^2}{\rho U^2} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{2gl}{U^2} (\delta^3 + i) \right]^{1/2} \right\} [1 + O(\delta^3)] + O(k^{-2}) \quad (3.12)$$

Если считать $\omega = 2gl / U^2 \gg 1$, то можно воспользоваться асимптотическим представлением интеграла вероятности;

$$R = - \frac{\sqrt{2} Q^2}{\rho U^2} \left[1 - \frac{U}{\sqrt{\pi} gl} e^{-\varepsilon l} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2gl}{U^2}\right) \right] [1 + O(\delta^3) + O(\omega^{-1})] + O(k^{-2}) \quad (3.12)$$

Эта формула дает решение поставленной задачи. Выражение (3.10) показывает, что точки экстремума определяются соотношением $2gl / U^2 \approx \pi(m - 1/4)$, так что волновое сопротивление будет

$$|R|_{\min} \approx \frac{\sqrt{2} Q^2}{\rho U^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi \sqrt{n - 1/8}} \exp[-\pi(2n - 1/4)\delta^3] \right\} \quad \text{при } m = 2n$$

$$|R|_{\max} \approx \frac{\sqrt{2} Q^2}{\rho U^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi \sqrt{n + 3/8}} \exp[-\pi(2n + 3/4)\delta^3] \right\} \quad \text{при } m = 2n + 1$$

Отсюда следует интересный факт, что для данной скорости существует ряд выгодных длин корабля, определяемых равенством

$$2l = \pi U^2 g^{-1} (2n - 1/4) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Отметим, что при малых значениях параметра ω необходимо для определения волнового сопротивления пользоваться формулой (3.11).

Поступила 15 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1959.
2. Конторович М. И., Муравьев Ю. К. Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи дифракции. Ж. техн. физ., 1951, т. 22, вып. 3.
3. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V. Физматгиз, 1960.
5. Никитин А. К., Грунтфест Р. А. К плоской задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы». Изд-во Наука, 1964.
6. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
7. Лурье А. И. Операционное исчисление. М.—Л., Гостехиздат, 1960.
8. ДеБрейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
9. Градштейн И. С., Рыжик М. И. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.