

## ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ШАРА, ПОЛУПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Л. С. ВОРОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

Как известно, изучение удара в идеальной несжимаемой жидкости в классической постановке сводится к смешанным задачам теории потенциала.

В плоском случае их решение облегчается использованием методов теории функции комплексного переменного.

В пространственном случае дело осложняется, особенно если граница объема, занятого жидкостью, имеет сложную форму. Поэтому влияние дна и стенок сосудов на распределение давлений и скоростей при ударе в пространственном случае изучено мало.

В настоящей работе рассматривается вертикальный удар сферического твердого тела диаметром  $2a$ , наполовину погруженного в слой жидкости конечной глубины (фиг. 1). Основное внимание уделено исследованию влияния дна на явления, имеющие место при ударе.

В случае, если дно имеет сферическую форму, вопрос изучен Н. Е. Жуковским [1].

1. Поставленная задача сводится к отысканию гармонической функции  $\varphi_1$  в области  $\Omega_1$ , по условиям

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \text{ если } \theta = 1/2 \pi, r_1 > a \\ \partial \varphi_1 / \partial r_1 &= v \cos \theta, \text{ если } r_1 = a; \quad |\theta| < 1/2 \pi \quad (1.1) \\ \partial \varphi_1 / \partial y_1 &= 0, \text{ если } y_1 = h_1 \\ \varphi_1 &\rightarrow 0, \text{ если } \sqrt{x_1^2 + z_1^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Область  $\Omega_1$  есть слой  $0 \leq y_1 \leq h_1$ , из которого удален полушар (фиг. 1):

$$|\theta| \leq 1/2 \pi, \quad 0 \leq r_1 \leq a$$

Целесообразно в дальнейшем перейти к безразмерным параметрам

$$x = \frac{x_1}{h_1}, \quad y = \frac{y_1}{h_1}, \quad z = \frac{z_1}{h_1}, \quad \lambda = \frac{a}{h_1} \quad \varphi_1 = h_1 v \varphi \quad (1.2)$$

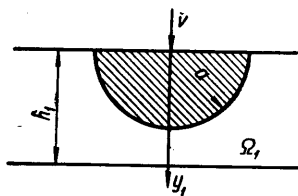
в которых рассматриваемая задача примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0, \quad \varphi = 0, \text{ если } \theta = 1/2 \pi, \quad r > \lambda \\ \partial \varphi / \partial r &= \cos \theta, \text{ если } r = \lambda, \quad |\theta| < 1/2 \pi \quad (1.3) \\ \partial \varphi / \partial y &= 0, \text{ если } y = 1; \quad \varphi \rightarrow 0, \text{ если } \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

2. Для построения решения задачи (1.3) используем метод отражения. Продолжив антисимметрично функцию  $\varphi$  через множество  $\theta = 1/2 \pi, r > \lambda$ , получим следующую задачу Неймана для  $\varphi$  в области  $\Omega$ . (Здесь область  $\Omega$  есть слой  $|y| \leq 1$  с выброшенным шаром.)

$$\begin{aligned} d\varphi / dr &= \cos \theta, \text{ если } r = \lambda; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ d\varphi / dy &= 0, \text{ если } y = \pm 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq \lambda^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Можно дальше продолжить функцию  $\varphi$  четным образом через плоскости  $y = \pm 1, \pm 3; \dots$



Фиг. 1

При этом, приходим к следующей задаче: найти гармоническую в области  $\Omega_2$  функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую на каждой сфере граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_n} = \cos \theta_n (-1)^n \quad \left( \cos \theta_n = \frac{y - 2n}{r_n} \right)$$

$$r_n = \sqrt{x^2 + z^2 + (2n - y)^2} = \sqrt{r^2 - 4rn \cos \theta + 4n^2} \quad (2.2)$$

и исчезающую при  $\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ ; здесь область  $\Omega_2$  — внешность решетки сфер  $\omega_n$ , фиг. 3.

3. Для отыскания  $\varphi$  введем систему функций  $\varphi_k$  посредством следующих соотношений:

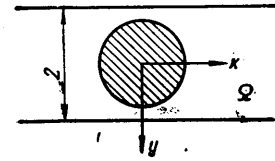
$$\varphi_k(x, y, z) = \sum (-1)^n \chi_k(x, y - 2n, z)$$

$$\chi_k = \frac{P_k(\cos \theta)}{r^{k+1}} \quad (3.1)$$

где  $P_k(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра.

Из 3.1 получаем

$$\varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{P_k(\cos \theta_n)}{r_n^{k+1}} \quad (3.2)$$



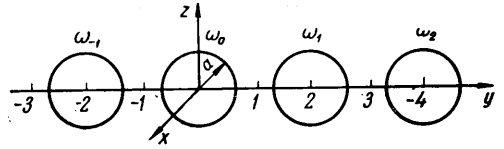
Фиг. 2

Относительно  $\varphi_k$  на основе (3.1), (3.2) можно высказать следующие утверждения:

- $\varphi_k$  — гармонические функции вне решетки сфер  $\omega_n$ ;
- $d\varphi_k / dy = 0$  для  $y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ;
- $\varphi_k \rightarrow 0$ , если  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ .

Ниже будет доказано, что  $\varphi_k$  образуют базис в пространстве  $G$  функций гармонических в области  $\Omega_2$ , периодических по  $y$  с периодом 2, симметричных относительно плоскостей  $y = \pm 1, \pm 3, \dots$  и исчезающих при  $\rho \rightarrow \infty$ . Иными словами, при некоторых условиях имеет место представление

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \varphi_k \quad (3.3)$$



Фиг. 3

Если учесть, что решение рассматриваемой задачи обращается в нуль на плоскостях  $y = 0, \pm 2, \dots$ , то в (3.3) надо удерживать лишь  $M_k$  с нечетными  $k$ , и при этом

$$\varphi = \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} M_k \varphi_k \quad (3.4)$$

Все функции (3.4) при любом наборе  $M_k$  удовлетворяют условиям (1.3), и  $M_k$  надо подобрать так, чтобы удовлетворялось последнее условие на сфере

$$\sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} M_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} = \cos \theta = P_1 \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) эквивалентно бесконечной системе относительно  $M_k$ , которую можно получить умножением (3.5) на  $P_1, P_3, \dots$  и последующим интегрированием по переменной  $x = \cos \theta$  в пределах от  $-1$  до  $+1$ .

В результате для  $M_k$  получаем систему

$$\sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} C_{1k} M_k = \frac{2}{3}, \quad \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} C_{pk} M_k = 0 \quad (p > 1) \quad (3.6)$$

$$C_{pk} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} P_p(x) dx \Big|_{r=\lambda} \quad p = 1, 3, 5 \dots \quad (3.7)$$

Ниже будет доказано, что система (3.6) всегда разрешима в таких классах последовательностей  $M_k$ , которые приводят к физическим осмысленным потенциалам  $\varphi$ .

Придадим вначале  $C_{pk}$  такую форму, на основе которой будет построен метод эффективного решения системы (3.6). Для этого разложим  $\varphi_k$  и  $\partial \varphi_k / \partial r$  по полиномам Лежандра  $P_s(\cos \theta)$ . Построение таких разложений довольно громоздко, поэтому укажем путь их получения, приведя окончательные результаты. Будем исходить из формулы (3.2) и, в первую очередь получим разложение по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{r_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2n)^{k+1}} P_k(\cos \theta), \quad r = \lambda, \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{r_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2n)^{k+1}} P_k(-\cos \theta), \quad r = \lambda, \quad n \leq -1$$

Последовательно дифференцируя каждую из формул (3.8) по  $\cos \theta$ , получим

$$\frac{1}{r_n^{2k+1}} = \frac{1}{(2k-1)!} \frac{1}{(2\lambda n)^k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s P_s^{(k)}(\cos \theta)}{(2n)^{s+1}} \quad r = \lambda, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{r_n^{2k+1}} = \frac{1}{(2k-1)!} \frac{1}{(2\lambda n)^k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s P_s^{(k)}(-\cos \theta)}{(2n)^{s+1}}, \quad n \leq -1$$

Имеем теперь из (3.3), (3.8) при  $k = 1$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\cos \theta}{\lambda^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda \cos \theta - 2n}{r_n^3} = \frac{\cos \theta}{\lambda^2} + 2\lambda \cos \theta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{P_1'}{2^2 n^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda^2 P_3'}{2^5 n^5} + \dots \right) \right\} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\lambda P_2'}{2^3 n^3} + \frac{\lambda^3 P_4'}{2^5 n^5} + \dots \right) = \\ &\quad \frac{\cos \theta}{\lambda^2} + 2 \cos \theta \left( \frac{\lambda P_1' B_3}{2^3} + \frac{\lambda^3 P_3' B_5}{2^5} + \dots \right) - \\ &\quad - 2 \left( \frac{\lambda P_2' B_3}{2^3} + \frac{\lambda^3 P_4' B_5}{2^5} + \dots \right) = \frac{\cos \theta}{\lambda^2} + 2 \sum_{p=3, 5, \dots}^{\infty} \frac{B_p \lambda^{p-2}}{2^p} (P_{p-2}' \cos \theta - P_{p-1}') \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$B_p = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

Учтя соотношение  $P_{p-1}' - P_{p-2}' \cos \theta = (p-1) P_{p-2}$ , окончательно получаем

$$\varphi_1(\lambda, \theta) = \frac{\cos \theta}{\lambda^2} - \sum_{p=3, 5, \dots}^{\infty} \frac{B_p \lambda^{p-2}}{2^{p-1}} (p-1) P_{p-2} \quad (3.11)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \varphi_3(\lambda, \theta) &= \frac{P_3(\cos \theta)}{\lambda^4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{P_3(\cos \theta_n)}{r_n^4} = \\ &= \frac{P_3(\cos \theta)}{\lambda^4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{5 \cos^2 \theta_n - 3}{2r_n^4} \cos \theta_n = \\ &= \frac{P_3(\cos \theta)}{\lambda^4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{[5(\lambda \cos \theta - 2n)^2 - 3r_n^2](\lambda \cos \theta - 2n)}{r_n^7} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используем непосредственно проверяемое символическое тождество

$$(\lambda P_1 - 2n)^3 = [5(H/\lambda \cos \theta - 2n)^2 - 3r_n^2](\lambda \cos \theta - 2n) \quad (3.13)$$

где левая часть раскрывается следующим образом:

$$(\lambda P_1 - 2n)^3 = \lambda^3 P_3 - 3\lambda^2 P_2 2n + 3\lambda P_1 4n^2 - 8n^3 \quad (3.14)$$

Из (3.12), (3.13) следует

$$\begin{aligned} \varphi_3(\lambda, \theta) &= \frac{P_3(\cos \theta)}{\lambda^4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda P_1 - 2n)^3}{r_n^7} = \frac{P_3(\cos \theta)}{\lambda^4} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\lambda P_1 - 2n)^3 \frac{1}{3 \cdot 5} \left( \frac{P_3'''}{2^7 n^7} + \frac{\lambda P_4'''}{2^8 n^8} + \dots \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\lambda P_1 + 2n)^3 \frac{1}{3 \cdot 5} \left[ \frac{P_3'''}{2^7 n^7} + \frac{\lambda P_4'''}{2^8 n^8} + \dots \right] = \\ &= \frac{P_3(\cos \theta)}{\lambda^4} + \frac{2}{15} \left\{ \frac{\lambda B_5}{2^5} (3P_1 P_3''' - P_4''') + \frac{\lambda^3 B_7}{2^7} (P_3 P_3''' - 3P_2 P_4''' + \right. \\ &\left. + 3P_1 P_5''' - P_6''') + \frac{\lambda^5 B_9}{2^9} (P_3 P_5''' - 3P_2 P_6''' + 3P_1 P_7''' - P_8''') + \dots \right\} \end{aligned}$$

Если теперь учесть соотношения

$$\begin{aligned} P_3 P_n''' - 3P_2 P_{n+1}''' + 3P_1 P_{n+2}''' - P_{n+3}''' &= -(n+3)(n+1)(2.5n+5)P_n \\ 3P_1 P_3''' - P_4''' &= -60 \end{aligned} \quad (3.15)$$

то из (3.13) получим

$$\varphi_3(\lambda, \theta) = \frac{P_3}{\lambda^4} - \frac{1}{15} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{2^{2k+4}} B_{2k+5} (2k+4)(2k+2)(5k+7.5) P_{2k+1} \quad (3.16)$$

Формула (3.16) и дает окончательное представление для функции  $\varphi_3$  в виде ряда по полиномам Лежандра. Не приводя выкладок, запишем еще аналогичные представления для  $\varphi_5$

$$\varphi_5(\lambda, \theta) = -\frac{3}{32} \lambda P_1 B_7 - \frac{7}{32} \lambda^3 P_3 B_9 - \frac{63}{256} \lambda^5 P_5 B_{11} P_5 / \lambda^6 + \dots \quad (3.17)$$

На основе (3.11), (3.17) легко найти  $d\varphi_k/dr|_{r=\lambda}$  и представить основное уравнение (3.6) в виде

$$\begin{aligned} (2 + \frac{1}{2} B_3 \lambda^3) M_1 + \frac{1}{4} \lambda^3 B_5 M_3 + \frac{3}{32} \lambda^3 B_7 M_5 + \dots &= -\lambda^3 \\ \frac{3}{4} \lambda^7 B_5 M_1 + (4 + \frac{15}{16} \lambda^7 B_7) M_3 + \frac{21}{32} \lambda^7 B_9 M_5 + \dots &= 0 \\ \frac{15}{32} \lambda^{11} B_7 M_1 + \frac{35}{32} \lambda^{11} B_9 M_3 + (6 + \frac{315}{256} \lambda^{11} B_{11}) M_5 + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Систему (3.18) можно решать разложением  $M_k$  в ряды по степеням  $\lambda$ , используя обычную процедуру определения коэффициентов разложения.

Приведем окончательные формулы, дающие решение задачи до членов порядка  $\lambda^{15}$

$$M_5 = 5\lambda^7 L_5, \quad L_5 = 1/128 B_7 \lambda^7 (1 - 1/4 B^3 \lambda_3 + \dots) \quad (3.19)$$

$$M_7 = M_9 = \dots = 0$$

Удержанное количество членов в разложениях (3.19) обеспечивает достаточную точность решения задачи даже при очень малой толщине слоя, близкой к радиусу. Эту точность можно охарактеризовать следующим образом. Если подставить (3.19) в формулу (3.4), то получим функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме условия на сфере. Это условие выполнено с максимальной погрешностью в 2.8% для весьма неблагоприятного случая  $\lambda = 0.9$ . С уменьшением  $\lambda$  погрешность в удовлетворении последнего условия (1.3) резко падает.

4. Исследуем распределение давлений при ударе. Как известно, импульсивное давление определяется соотношением  $P_t = -\rho\varphi_1 = -\rho h_1 v\varphi$ , где  $\rho$  — плотность жидкости.

Рассмотрим распределение давлений на поверхности сферы. Для этого, используя разложения  $M_k$ , представим  $\varphi$  в виде ряда по степеням  $\lambda$ , который имеет вид

$$\varphi = \frac{\lambda^3 P_1}{2r^2} + \lambda \sum_{k=1, 3, \dots} L_k P_k \left[ (k+1) \left(\frac{r}{\lambda}\right)^k + k \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{k+1} \right] \quad (4.1)$$

где  $L_k$  даются соотношениями (3.19) и табл. 1.

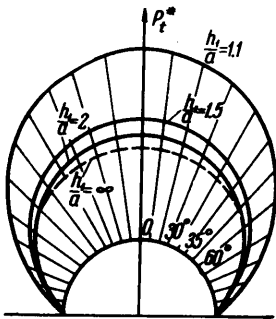
Таблица 1

$\lambda$	$a/n$	$L_1$	$L_3$	$L_5$
$10/11$	0.45	-0.1418	-0.02337	-0.004416
$2/3$	$1/3$	$-0.359969 \cdot 10^{-1}$	$-0.433995 \cdot 10^{-2}$	$-0.486199 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.25	$-0.145064 \cdot 10^{-1}$	$-0.978243 \cdot 10^{-3}$	$-0.623174 \cdot 10^{-4}$
0.4	$1/5$	$-0.731909 \cdot 10^{-2}$	$-0.315747 \cdot 10^{-3}$	$-0.128911 \cdot 10^{-4}$
$1/3$	$1/6$	$-0.420269 \cdot 10^{-2}$	$-0.126079 \cdot 10^{-3}$	$-0.357554 \cdot 10^{-5}$
$2/7$	$1/7$	$-0.264233 \cdot 10^{-2}$	$-0.581478 \cdot 10^{-4}$	$-0.121164 \cdot 10^{-5}$
0.2	$1/10$	$-0.903171 \cdot 10^{-3}$	$-0.973881 \cdot 10^{-5}$	$-0.994386 \cdot 10^{-7}$

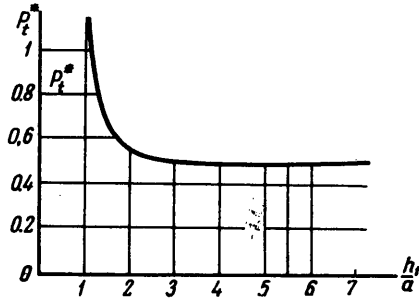
Формулой (4.1) удобно пользоваться для расчета давлений в области, прилегающей к сфере  $r = a$ . В частности, на самой сфере получаем

$$P_t = \rho a v \left[ 0,5 P_1 - \sum_{k=1, 3, \dots} L_k P_k (2k+1) \right] \quad (4.2)$$

Результаты расчета по формуле (4.2) приведены на фиг. 4. На этой же фигуре пунктирной линией изображен график давлений для случая бесконечной глубины.



Фиг. 4



Фиг. 5

Из фиг. 4 видно, что уже при  $h_1 \geq 2.5a$  влияние дна мало существенно и не может исправить давление более чем на 5%.

На фиг. 5 дан график зависимости максимального давления на шаре от  $h_1/a$ . Рассмотрим теперь распределение давлений на дне. Для его расчета целесообразно

Таблица 2

$f(\theta, \lambda)$					
	0°	30°	45°	60°	
1	1.69	0.802	0.352	0.0891	
$2/3$	0.438	0.273	0.134	0.0356	
0.5	0.234	0.147	0.0725	0.0192	
0.4	0.148	0.0930	0.0458	0.0121	
$1/3$	0.102	0.0642	0.0318	0.00836	
$2/7$	0.0745	0.0470	0.0231	0.00611	
0.2	0.0365	0.0229	0.0113	0.00300	

пользоваться формулой

$$\Phi = \sum_{k=1, 3, \dots} M_k \Phi_k$$

При  $y = 1$  получаем

$$P = \rho a v f(\theta, \lambda)$$

$$f(\theta, \lambda) = \lambda^2 \Phi_1 - 2 \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} k \lambda^{k+1} L_k \Phi_k \quad (4.3)$$

При определении  $\Phi_k$  в (4.3) потребуются значения полиномов Лежандра, которые можно взять из [2]. Табл. 2 дает  $f(\theta, \lambda)$ . График давлений на дне для разных значений  $\lambda$  дан на фиг. 6.

На фиг. 7 представлена зависимость максимального давления на дне от  $\lambda$ .

5. Присоединенную массу при ударе можно найти по формуле

$$m_+ = - \frac{\rho}{v^2} \iint_S \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} ds_1 \quad (5.1)$$

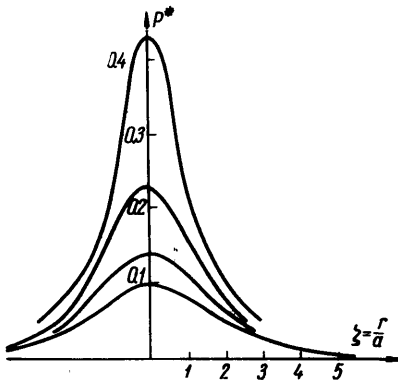
Интеграл (5.1) вычисляется, естественно, только на полусфере, погруженной в жидкость. Из (5.1) вытекает

$$m^+ = \lambda a^3 \rho (1/3 - 2L_1) = m_{\infty}^+ (1 - 6L_1), \quad m_{\infty}^+ = 1/3 \lambda a^3 \rho \quad (5.2)$$

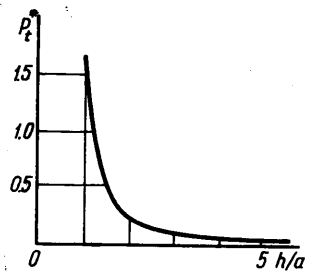
Здесь  $m_{\infty}^+$  — присоединенная масса в случае бесконечной глубины. Приводим значения отношений присоединенной массы в случае конечной и бесконечной глубины для некоторых значений  $\lambda$

$\lambda$	0	0.2	$2/7$	$1/3$	0.4	0.5	$10/11$
$m^+/m_{\infty}^+ = 1$	1	1.0054	1.0158	1.0252	1.0439	1.0370	1.8510

6. Из вышеизложенного можно сделать следующий вывод: при вертикальном ударе шара, до половины погруженного в слой жидкости конечной глубины, можно практически пренебречь влиянием дна на основные характеристики удара и принять  $h_1 = \infty$ , если  $h_1 \geq 2.5 a$ .



Фиг. 6



Фиг. 7

При этом погрешность при определении присоединенной массы и максимальных давлений не превысит 5%. При  $h_1 < 2.5a$  влияние дна становится существенным и может быть учтено на основе данного здесь решения задачи.

7. Обратимся к обоснованию вышеприведенного решения задачи. Выясним некоторые свойства потенциала в предположении разрешимости задачи (1.3).

**Лемма 7.1.** Пусть  $\varphi$  — решение задачи (1.3), убывающее при  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\varphi$  и все ее производные убывают при  $\rho \rightarrow \infty$  показательным образом.

Для доказательства рассматриваются значения функции на круговом цилиндре радиуса  $R > a$ , имеющем ось, совпадающую с осью  $y$ . На этом цилиндре  $\varphi$  — периодическая аналитическая функция, и поэтому она разлагается в ряд Фурье вида

$$\varphi|_{\Gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi y \quad (7.1)$$

причем  $a_k$  убывают быстрее любой степени  $1/k$  [3]. Если теперь учесть, что  $\varphi$  исчезает при  $\rho \rightarrow \infty$ , то из (7.1) для  $\varphi$  вне цилиндра  $\Gamma$  получим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi y K_0(k\rho) \quad (7.2)$$

где  $K_0$  — функция Макдональда. Известно, что при достаточно больших  $\rho$  для  $K_0$  и ее производных имеет место оценка [4]

$$\frac{d^n}{d\rho^n} K_0(k\rho) \leq C(n, k) e^{-k\rho} \quad (7.3)$$

Здесь  $C(n, k)$  можно считать полиномом относительно  $k$ . Из (7.2), (7.3) вытекает равномерная сходимость ряда (7.2) и всех производных рядов вне  $\Gamma$ . Из (7.2) вытекает также оценка

$$\begin{aligned} |\varphi| &\leq \max_{k=1, 2, \dots} |a_k| \sum_{k=1}^{\infty} K_0(k\rho) \leq \max_{k=1, 2, \dots} |a_k| C \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\rho} = \\ &= \max_{k=1, 2, \dots} |a_k| C \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Аналогичные оценки легко получить и для всех производных.

Лемма 7.1 показывает, что без ограничения общности решение задачи (1.3) можно искать в классе функций, исчезающих при  $\rho \rightarrow \infty$  показательным образом.

Однозначная разрешимость (1.3) может быть доказана вариационными методами. Соответствующие рассуждения хорошо известны [4]. Отметим, что  $\varphi$  будет бесконечно дифференцируемой функцией везде, включая и сферы  $\omega_n$ .

Введем далее две периодические гармонические функции  $S(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  и  $H(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  посредством соотношений

$$\begin{aligned} S(x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 - 2n)^2 + (z - z_0)^2}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$H(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial R_n} \frac{1}{r_n} (-1)^n \quad (7.6)$$

Здесь  $\partial/\partial R_n$  — производная по нормали к сфере  $\omega_n$ . Нижеследующие леммы обосновывают введение  $S$  и  $H$ .

**Лемма 7.2.** Ряд (7.5) сходится равномерно в замкнутой области  $\Omega$ .

Доказательство проводится следующим путем. Введем обозначения

$$a = (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad b = y - y_0$$

и рассмотрим оценку

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{a+(b-2n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a+(b+2n)^2}} \right\} \right| = \quad (7.7) \\ & = \left| \frac{1}{\sqrt{a+(b-2N)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a+(b+2N)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a+(b-2N-2)^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{a+(b+2N+2)^2}} + \dots \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{a+(2N-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a+(2N+2-b)^2}} \right| + \\ & \quad + \left| \frac{1}{\sqrt{a+(2N+b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a+(2N+2+b)^2}} \right| + \dots = \\ & = \frac{8N+4-4b}{\sqrt{a+(2N-b)^2}\sqrt{a+(2N+2-b)^2}\sqrt{a+(2N-b)^2} + \sqrt{a+(2N+2-b)^2}} + \\ & + \frac{8N+4+4b}{\sqrt{a+(2N+b)^2}\sqrt{a+(2N+2+b)^2}\sqrt{a+(2N+b)^2} + \sqrt{a+(2N+2+b)^2}} + \dots \\ & \quad \dots \leq \frac{2(2N+1-b)}{(2N-b)^3} + \dots \end{aligned}$$

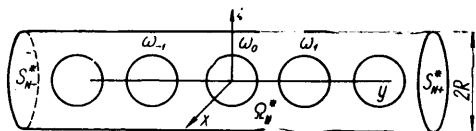
Из (7.7) вытекает равномерная в  $\Omega$  (но не абсолютная) сходимость ряда (7.5).

**Лемма 7.3.** Ряд (7.6) сходится равномерно в  $\Omega$ . Доказательство элементарно и поэтому не приводится.

**Лемма 7.4.** Решение задачи (1.3) дается соотношением

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \varphi(x_0, y_0, z_0) S(x-x_0, y-y_0, z-z_0) - \right. \\ \left. - \varphi(x_0, y_0, z_0) H(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \right] d\omega_0 \quad (7.8) \end{aligned}$$

Для доказательства рассмотрим область  $\Omega_N^*$ , представляющую собой круговой цилиндр конечной длины  $2(2N+1)$  и радиуса  $R$  с осью, совпадающей с осью  $y$ , из которого выброшены внутренности сфер  $\omega_n$  (фиг. 8). Пусть  $x, y, z$  — точка из  $\Omega_N^*$ . В этом случае, как известно,



Фиг. 8

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{S_N^*} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS_{N^*} \quad (7.9)$$

Здесь  $S_N^*$  — граница  $\Omega_N^*$ , состоящая из поверхности цилиндра  $S_{1N^*}$ , сфер  $\omega_n$  и кругов  $S_{-N}^*$  и  $S_{+N}^*$ , представляющих собой «крышки» цилиндра (фиг. 8). В соответствии с этим соотношение (7.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{1N^*}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS_{1N^*} + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sum_{n=-N}^{n=+N} (-1)^n \frac{1}{r_n} - \right. \\ \left. - \varphi \sum_{n=-N}^{n=+N} (-1)^n \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_n} \right\} d\omega_0 - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{-N}^*} \varphi \frac{1}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{-N^*} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{+N}^*} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{+N^*} \quad (7.10) \end{aligned}$$

При переходе от (7.9) к (7.10) было учтено, что  $\partial \varphi / \partial n = 0$  на  $S_{-N}^*$  и  $S_{+N}^*$ . Будем теперь увеличивать радиус цилиндра  $R$ , удаляя  $S_{1N^*}$  в бесконечность.

Легко видеть при этом, что первый интеграл в правой части (7.10) будет исчезать, так как, в силу леммы (7.1), подынтегральное выражение убывает показательным образом.



Поэтому из (7.10) вытекает

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sum_{n=-N}^{n=+N} (-1)^n \frac{1}{r_n} - \varphi \sum_{n=-N}^{n=+N} (-1)^n \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_n} \right\} d\omega_0 - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{-N}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{-N} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{+N}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{+N} \end{aligned} \quad (7.11)$$

В (7.11) величины  $S_{-N}$  и  $S_{+N}$  — уже плоскости, перпендикулярные оси  $y$  и отстоящие от начала координат на расстоянии  $(2N+1)$ . Интегралы  $S_{-N}$  и  $S_{+N}$  существуют в силу той же леммы 7.1. Более того, они допускают оценки

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{4\pi} \int_{S_{-N}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{-N} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{+N}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{+N} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{4\pi} \left( \max_{S_{+N}} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right| + \max_{S_{-N}} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right| \right) \int_{S_{-N}} |\varphi| dS \end{aligned}$$

Интеграл в правой части (7.12), в силу периодичности задачи, не зависит от  $N$ . Если теперь увеличивать  $N$ , то легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \max_{S_{-N}} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right|, \quad \max_{S_{+N}} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right| \\ & \text{будут исчезать, т. е.} \\ & \lim \left| \frac{1}{4\pi} \int_{S_{-N}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{-N} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{+N}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_{+N} \right| = 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Из (7.11) при этом получается представление (7.8).

**Лемма 7.5.** Ряды (4.1), которыми даются функции  $\varphi_k$ , равномерно сходятся в  $\Omega$ .

**Лемма 7.6.** Пусть  $\varphi$  — бесконечно дифференцируемая периодическая функция. Коэффициенты ряда этой функции по полиномам Лежандра убывают быстрее любой фиксированной степени.

Для коэффициентов Фурье имеем соотношения

$$C_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad P_n = -\frac{1}{n(n+1)} [(1-x^2) P_n']'$$

Из этих соотношений получаем

$$C_n = -\frac{n+0,5}{n(n+1)} \int_{-1}^1 f(x) [(1-x^2) P_n']' dx$$

и после интегрирования по частям будем иметь

$$C_n = -\frac{n+0,5}{n(n+1)} \int_{-1}^1 [f'(1-x^2)]' P_n(x) dx$$

Подставив теперь в полученное выражение  $P_n$  через его производные и произведя повторно интегрирование по частям, получим выражение вида

$$C_n = +\frac{(n+0,5)}{n^2(n+1)^2} \int_{-1}^1 \{[f'(1-x^2)]'\}' P_n(x) dx$$

Очевидно, такая операция может быть проведена сколь угодно раз, что в сущности и доказывает лемму.

Получим теперь некоторое представление решения рассмотренной задачи (1.3), годное в окрестности основной сферы  $\omega_0$ . Для этого рассмотрим  $\varphi$  в сферическом слое, ограниченном  $\omega_0$  и некоторой концентрической сфе-

рой  $\omega_k$  радиуса  $\lambda < R < 1$ . На этой сфере  $\varphi = \varphi(R, \theta)$ , а в слое имеем

$$\varphi = \sum_{n=1, 3, \dots} P_n(\theta) \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) \quad (7.13)$$

В (8.13) удержаны лишь члены с нечетными номерами  $n$ , так как  $\varphi$  антисимметрична относительно  $\theta = 1/2 \pi$ .

Пусть, далее, разложение  $\varphi(R, \theta)$  по полиномам Лежандра имеет вид

$$\varphi(R, \theta) = \sum_{n=1, 3, \dots} P_n(\theta) A_n \quad (7.14)$$

При этом, поскольку  $\varphi(R, \theta)$  — бесконечно дифференцируемая функция, то, в силу леммы 7.6,  $A_n$  убывают быстрее любой степени  $n$ . Для определения  $C_n$  и  $D_n$  имеем две следующие системы уравнений:

$$C_n R^n + \frac{D_n}{R^{n+1}} = A_n \quad (n = 1, 3, \dots), \quad C_1 - 2D_1 \frac{1}{\lambda^3} = 1 \quad (7.15)$$

$$nC_n \lambda^{n-1} - (n+1) D_n \lambda^{-(n+2)} = 0 \quad (n = 3, 5, \dots)$$

Из (7.15) следует

$$D_n = A_n \left( \frac{1}{R^{n+1}} + \frac{n+1}{n} R^n \lambda^{-2n+1} \right)^{-1}, \quad D_1 = \frac{A_1/R - 1}{1/R^3 + 2/\lambda^3}$$

$$C_n = A_n \lambda^{-2n+1} \frac{n+1}{n} \left( \frac{1}{R^{n+1}} + \frac{n+1}{n} R^n \lambda^{-2n+1} \right)^{-1}, \quad C_1 = \frac{\lambda^3 + 2R^2 A_1}{\lambda^3 + 2R^3}$$

На основе (7.13), (7.16) имеем

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta) \psi_n(r), \quad \psi_n(r) = \psi_{n1}(r) + \psi_{n2}(r) \quad (7.17)$$

$$\psi_{11}(r) = \frac{\lambda^3 + 2R^2 A_1}{\lambda^3 + 2R^3} r, \quad \psi_{12} = \frac{A_1/R - 1}{1/R^3 + 2/\lambda^3} \frac{1}{r}$$

$$\psi_{n1} = A_n \frac{n+1}{n} \lambda^{-2n+1} r^n \left( \frac{1}{R^{n+1}} + \frac{n+1}{n} R^n \lambda^{-2n+1} \right)^{-1}$$

$$\psi_{n2} = A_n \left( \frac{1}{R^{n+1}} + \frac{n+1}{n} R^n \lambda^{-2n+1} \right)^{-1} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (7.18)$$

Отсюда легко получаем оценку

$$|\psi_n(r)| \leq |A_n| \left[ 1 + \frac{n}{n+1} \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda}{R} \right)^n \right], \quad \lambda \leq r \leq R \quad (7.19)$$

из которой вытекает, что первый ряд (7.17) равномерно сходится в слое  $\lambda \leq r \leq R$ .

Точно так же устанавливается равномерная сходимость всех производных от первого ряда (7.17). Подставим теперь первый ряд (7.17) в (7.8) и тогда в силу равномерной сходимости этого ряда и производного ряда по  $r$  будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=1, 3, \dots} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} \left[ P_n(\theta) \frac{\partial \psi_n}{\partial r} S - P_n(\theta) \psi_n H \right] d\omega_0 = \\ &= \sum_{n=1, 3, \dots} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} P_n(\theta) \left( \frac{d\psi_{n1}}{dr} S - \psi_{n1} H \right) d\omega_0 + \\ &+ \sum_{n=1, 3, \dots} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} P_n(\theta) \left( \frac{d\psi_{n2}}{dr} S - \psi_{n2} H \right) d\omega_0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Далее, поскольку все  $\psi_{n1}$  — гармонические в шаре радиуса  $\lambda$  функции, то легко видеть, что первая сумма в левой части (7.20) равна нулю. Кроме того, имеет место соотношение

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\omega_0} P_n(\theta) \left( \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{n+1}} S - \frac{1}{r^{n+1}} H \right) d\omega_0 = \varphi_n(x, y, z) \quad (7.21)$$

Из (7.20), (7.21) получаем, что в каждой точке имеет место представление

$$\varphi = \sum_{n=1, 3, \dots} A_n \varphi_n(x, y, z) \left( \frac{1}{R^{n+1}} + \frac{n+1}{n} R^n \lambda^{-2n+1} \right)^{-1} \quad (7.22)$$

Таким образом, установлено, что функция  $\varphi$  разлагается в ряд по  $\varphi_n$ , сходящийся в каждой точке  $\omega_0$ . Поскольку  $A_n$  убывают быстрее любой степени  $n$ , ряд (7.22) сходится равномерно во всякой замкнутой подобласти  $\Omega$ , содержащей  $\omega_0$ .

Таким же свойством будет обладать и любой производный ряд. Поэтому ряд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{n=1, 3, \dots} A_n \left( \frac{1}{R^{n+1}} + \frac{n+1}{n} R^n \lambda^{-2n+1} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \quad (7.23)$$

будет сходиться равномерно на  $\omega_0$ , и его можно почленно интегрировать после умножения на  $P_k(\theta)$ .

Если учесть первое граничное условие (2.1), то приходим к основной системе (3.6), где

$$M_k = A_k \left( \frac{1}{R^{k+1}} + \frac{k+1}{k} R^k \lambda^{-2k+1} \right)^{-1} \quad (7.24)$$

Таким образом, из вышеприведенных рассуждений вытекает разрешимость системы (3.6).

8. Однозначность решения системы (3.6) можно доказать при достаточно малых  $\lambda$ . Для этого представим  $\varphi_k$  и  $d\varphi_k/dr$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{P_k(\cos \theta)}{r^{k+1}} + D_k, & D_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_k(\cos \theta)_n}{r_n^{k+1}} (-1)^n \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} &= -(k+1) \frac{P_k(\cos \theta)}{r^{k+2}} + \frac{\partial D_k}{\partial r} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Из (8.1) вытекает

$$C_{ki} = \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} P_i(x) dx = C_{ki}^* \quad (i \neq k) \quad (8.2)$$

$$C_{ii} = -\frac{2(i+1)}{2i+1} \frac{1}{\lambda^{i+2}} + C_{ii}^* \quad C_{ki}^* = \int_{-1}^1 \frac{\partial D_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} P_i(x) dx$$

На основе (8.2) системе (3.6) можно придать вид

$$-\frac{2(i+1)}{2i+1} \frac{1}{\lambda^{i+2}} M_i = -\sum_{k=1}^{\infty} C_{ki}^* M_k + b_i^*, \quad b_1 = \frac{2}{3}, \quad b_i = 0 \quad (i > 1) \quad (8.3)$$

или

$$\begin{aligned} M_i &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{ki} M_k + b_i, & d_{ki} &= C_{ki}^* \frac{2i+1}{2(i+1)} \lambda^{i+2} \\ b_1 &= -\frac{1}{2} \lambda^3, & b_i &= 0 \quad (i > 1) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Докажем, что при достаточно малом  $\lambda$  система (8.4) вполне регулярна, е. что имеют место неравенства

$$\sum_{k=1, 3, \dots} |d_{ki}| \leq 1 - \gamma < 1 \quad * \quad (8.5)$$

Произведем для этого оценку  $dD_k/\partial r$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\partial P_k(\cos \theta_n)}{\partial \cos \theta_n} \frac{\partial \cos \theta_n}{\partial r} \frac{1}{r_n^{k+1}} - \right. \\ &- (k+1) \frac{P_k(\cos \theta_n)}{r_n^{k+2}} \frac{\partial r_n}{\partial r} \Big] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\partial P_k(\cos \theta_n)}{\partial \cos \theta_n} \frac{2n\lambda \sin^2 \theta}{r_n^{k+4}} - \right. \\ &- (k+1) \frac{P_k(\cos \theta_n)(\lambda - 2n \cos \theta)}{r_n^{k+3}} \Big] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \theta 2n\lambda g_{kn} - \\ &- (k+1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_{kn} \quad (8.6) \\ g_{kn} &= \frac{P_k'(\cos \theta_n)}{r_n^{k+4}} - \frac{P_k'(\cos \theta_{-n})}{r_{-n}^{k+4}} \\ f_{kn} &= \frac{P_k(\cos \theta_n)(\lambda - 2n \cos \theta)}{r_n^{k+3}} + \frac{P_k(\cos \theta_{-n})(\lambda + 2n \cos \theta)}{r_{-n}^{k+3}} \end{aligned}$$

Из (8.6) получаем

$$\begin{aligned} C_{ki}^* &= 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \int_{-1}^1 (1-x^2) g_{kn} P_i(x) dx - \\ &- (k+1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{-1}^1 f_{kn} P_i(x) dx \quad (8.7) \end{aligned}$$

Имеем, далее

$$|C_{ki}^*| \leq 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{-1}^1 (1-x^2) |g_{kn}| dx + (k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 |f_{kn}| dx \quad (8.8)$$

Используя известное неравенство

$$|P_k'(\cos \theta_n)| \leq \frac{k+1}{|\sin \theta_n|} \quad (8.9)$$

получим для первой суммы в правой части (8.8)

$$\begin{aligned} 4\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 (1-x^2) |g_{kn}| dx &\leq 4\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \frac{(1-x^2)(k+1)}{|\sin \theta_n|} \left( \frac{1}{r_n^{k+4}} + \frac{1}{r_{-n}^{k+4}} \right) dx \leq \\ &\leq 4(k+1) \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \left( \frac{1}{r_{-n}^{k+2}} + \frac{1}{r_{-n}^{k+3}} \right) dx \quad (8.10) \end{aligned}$$

При выводе (8.10) использовалось соотношение

$$|\sin \theta_n| = \frac{\lambda |\sin \theta|}{r_n}$$

Из (8.10) следует

$$2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{-1}^1 (1-x^2) |g_{kn}| dx \leq \frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-\lambda)^{k+1}} - \frac{1}{(2n+\lambda)^{k+1}} \right] \quad (8.11)$$

Для второй суммы в правой части (8.8) будем иметь

$$\begin{aligned} (k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 |f_{kn}| dx &= 2(k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_{kn}| dx \leq \\ &\leq 2(k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^1 \frac{|\lambda - 2nx|}{r_n^{k+3}} dx + \int_0^1 \frac{|\lambda + 2nx|}{r_n^{k+3}} dx \right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

Если учесть теперь неравенство

$$|\lambda - 2nx| \leq r_n, \quad |\lambda + 2nx| \leq r_{-n} \quad (8.13)$$

то из (8.12) можно получить

$$\begin{aligned} (k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 |f_{kn}| dx &\leq 2(k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \frac{dx}{r_n^{k+2}} + \int_0^1 \frac{dx}{r_{-n}^{k+2}} \right) \leq \\ &\leq \frac{k+1}{\lambda k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{(2n-\lambda)^k} - \frac{1}{(2n+\lambda)^k} \right] \right\} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Из (8.8), (8.11), (8.14) вытекает

$$\begin{aligned} |C_{ki}^*| &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-\lambda)^{k+1}} - \frac{1}{(2n+\lambda)^{k+1}} \right] + \\ &+ \frac{k+1}{k\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{(2n-\lambda)^k} - \frac{1}{(2n+\lambda)^k} \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, 3, \dots} |d_{ki}| &\leq \frac{2i+1}{2(i+1)} \lambda^{i+2} \frac{2}{\lambda} \sum_{k=1, 3, \dots} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-\lambda)^{k+1}} - \frac{1}{(2n+\lambda)^{k+1}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{(2n-\lambda)^k} - \frac{1}{(2n+\lambda)^k} \right] \left. \right\} = \frac{2i+1}{i+1} \lambda^{i+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-\lambda)^2-1} - \right. \\ &- \frac{1}{(2n+\lambda)^2-1} + \frac{1}{n} \left[ \frac{2n-\lambda}{(2n-\lambda)^2-1} - \frac{2n+\lambda}{(2n+\lambda)^2-1} \right] \left. \right\} = \\ &= \frac{2i+1}{i+1} \lambda^{i+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{3-\lambda/n}{(2n-\lambda)^2-1} - \frac{3-\lambda/n}{(2n+\lambda)^2-1} \right] \end{aligned} \quad (8.16)$$

Легко убедиться, что ряды в правой части (8.16) будут знакопеременными с монотонно убывающими членами. Поэтому для их оценки можно взять в (8.16) лишь первые члены. При этом получим

$$\sum_{k=1, 3, \dots} |d_{ki}| \leq \frac{3}{2} \lambda^2 \frac{3-\lambda}{(2-\lambda)^2-1} \quad (8.17)$$

Условие полной регулярности системы (3.6) можно записать в виде

$$\frac{3}{2} \lambda^2 \frac{3-\lambda}{(2-\lambda)^2-1} < 1 \quad \text{или} \quad \lambda < \lambda^* = 0.55$$

Поступило 3 III 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости. Собр. соч. т. II, Госиздат, 1949.
2. Белоусов С. А. Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра. Изд-во АН СССР, 1956.
3. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Физматгиз, 1961.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, 1953.