

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ НЬЮТОНА ДЛЯ НЕПОЛОГИХ ТЕЛ

Г. И. МАЙКАПАР (Москва)

На основании анализа вариационных задач, в которых для вычисления давления применяется формула Ньютона, показано, что 1) законы изменения площадей поперечных сечений осесимметричных тел и тел, поперечные сечения которых имеют форму правильных многоугольников, по длине одинаковы; 2) закон изменения радиуса тела минимального сопротивления по его длине зависит от величины заданного радиуса dna или объема тела.

Несмотря на неопределенность условий применимости, закон Ньютона для давления на поверхность тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью

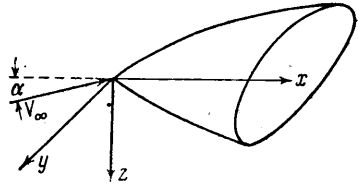
$$p = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sin^2 \alpha$$

широко применяется как для определения аэродинамических характеристик, так и для решения различных вариационных задач. Ньютон нашел решение вариационной задачи о теле наименьшего сопротивления без каких-либо дополнительных предположений<sup>1</sup>, однако в ряде современных работ предполагается, что тело пологое. В настоящей заметке приводятся некоторые результаты, полученные без этого предположения. Так как для неполигих тел в настоящее время нет еще простых способов расчета сопротивления трения, то оно здесь не рассматривается. Предполагается, что «аэродинамической тени» на поверхности тела нет.

Пусть поверхность тела (фиг. 1) задана в виде

$$z = z(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = r(x, \theta), \quad r_x = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad r_{\theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta}$$



Фиг. 1

в прямоугольной или цилиндрической системах координат соответственно.

Тогда отнесенные к  $\rho_{\infty} V_{\infty}^2$  подъемную силу  $P$  и лобовое сопротивление  $Q$  можно представить в виде

$$P = -\sin^2 \alpha \cos \alpha i_0 + \sin \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha) i_1 + \cos \alpha (2 - 3 \cos^2 \alpha) i_2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha i_3$$

$$Q = \sin^3 \alpha i_0 + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha i_1 + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha i_2 + \cos^3 \alpha i_3$$

Здесь  $i_v$  — распространенные на поверхность тела интегралы

$$i_v = \iint \frac{p^v dx dy}{1 + p^2 + q^2} = \iint \frac{r r_x^v (\sin \theta - r_{\theta} \cos \theta / r)^{3-v} d\theta dx}{1 + r_x^2 + (r_{\theta} / r)^2}, \quad v = 0, 1, 2, 3$$

Объем тела равен

$$V = \iint z dx dy = \frac{1}{2} \iint r^2 d\theta dx$$

Если поперечные сечения тела подобны, т. е. в прямоугольных или в цилиндрических координатах соответственно

$$z = y_0(x) f(\eta), \quad \eta = y(x)/y_0(x); \quad r = r_0(x) \varphi(\theta)$$

то

$$i_v = \iint \frac{y_0'^v y_0 (f - \eta f')^v d\eta dx}{1 + f'^2 + y_0'^2 (f - \eta f')^2} = \iint \frac{r_0 r_0'^v (\sin \theta - \varphi' \cos \theta / \varphi)^{3-v} \varphi^{v+1} d\theta dx}{1 + (\varphi' / \varphi)^2 + r_0'^2 \varphi^2}$$

$$V = \iint y_0^2 f d\eta dx = \frac{1}{2} \iint r_0^2 \varphi^2 d\theta dx$$

Из формулы (5) видно, что в случае пологого тела ( $y_0' \ll 1$ ,  $f' = O(1)$  или же  $r_0' \ll 1$ ) двойные интегралы приближенно могут быть представлены как произведения интегралов по поперечному сечению и длине тела, т. е., что влияние формы поперечного сечения и распределения площади их по длине тела независимо [2]. Эта независимость имеет место и при учете сопротивления трения [3].

В общем случае тел неполигих такой независимости нет, однако ее можно установить для некоторых частных случаев.

<sup>1</sup> Найденная Ньютоном экстремаль удовлетворяет необходимому условию Лежандра только при  $x' \geq 1/\sqrt{3}$  и не доходит до оси тела вращения [1].

В самом деле, для тел вращения  $\varphi = 1$ , и, следовательно,

$$i_v \sim \int \frac{r_0 r_0' v dx}{1 + r_0'^2}, \quad V = \pi \int r_0^2 dx \quad (7)$$

если поперечное сечение имеет форму ромба  $f(\eta) = \alpha(1-\eta)$ , то

$$i_v \sim \frac{4\alpha^v}{1 + \alpha^2} \int \frac{y_0 y_0' v dx}{1 + \alpha^2 y_0'^2 / (1 + \alpha^2)}, \quad V = 2\alpha \int y_0^2 dx \quad (8)$$

Замена переменной в первом интеграле (8)

$$y^0 = \frac{\alpha y_0}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

приводит его к виду (7)

$$i_v \sim \frac{4(1 + \alpha^2)^{1/2(v-1)}}{\alpha} \int \frac{y^0 (y^{0'})^v dx}{1 + (y^{0'})^2} \quad (9)$$

Очевидно, что аналогичный результат можно получить также для поперечных сечений, имеющих форму любых правильных многоугольников. Таким образом, уравнения Эйлера любых вариационных задач для осесимметричных тел и тел, поперечные сечения которых представляют собою подобные правильные многоугольники, отличаются только постоянными множителями при членах.

В частности, законы изменения площадей поперечного сечения осесимметричных тел и тел с поперечным сечением в форме правильного многоугольника, имеющих минимальное сопротивление, по их длине одинаковы.

Посмотрим теперь, зависит ли закон изменения площади поперечного сечения осесимметричного тела минимального сопротивления заданной длины от заданного объема или площади дна.

Так как экстремаль Ньютона до оси тела не доходит, то будем рассматривать тела «степенной» формы, для которых

$$x = (r/r_1)^n \quad (10)$$

Лобовое сопротивление при  $\alpha = 0$  определяется интегралом

$$i_3 = \int_0^1 \frac{r r'^3 dx}{1 + r'^2} = \int_0^{r_1} \frac{r dr}{1 + x^2} = \int_0^{r_1} \frac{r dr}{1 + n^2 r^{2(n-1)} / r_1^{2n}} \quad (11)$$

Объем равен

$$V = \frac{\pi n r_1^2}{n + 2} \quad (12)$$

Здесь  $r_1$  — радиус донного сечения, линейные величины отнесены к длине тела, а  $i_3$  и  $V$  — к квадрату и кубу этой длины соответственно.

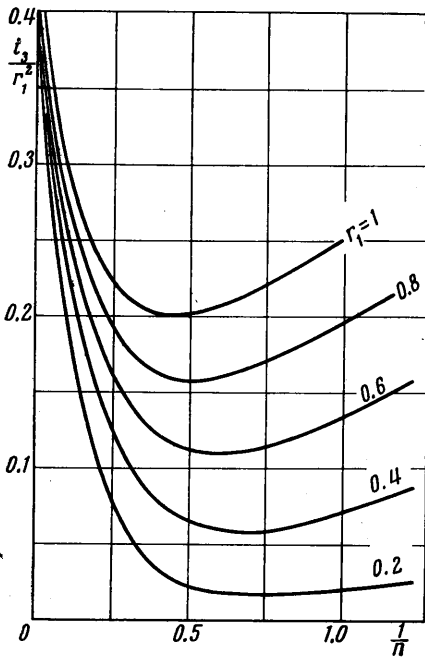
Интеграл (11) легко вычислить для некоторых значений  $n$ ; приведем результаты

$$\begin{aligned} n = \frac{1}{2}, & \quad i_3 = \frac{r_1^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16r_1^2} \ln(1 + 4r_1^2), & \quad V = \frac{\pi r_1^2}{5} \\ n = \frac{2}{3}, & \quad i_3 = \frac{r_1^2}{2} - \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{r_1^2} - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{1}{r_1^4} \ln \left[ 1 + \left(\frac{3}{2} r_1\right)^2 \right], & \quad V = \frac{\pi}{4} r_1^2 \\ n = \frac{3}{4}, & \quad i_3 = \frac{r_1^2}{2} - \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{1}{r_1^2} - 2 \left(\frac{3}{4}\right)^6 \frac{1}{r_1^4} + 2 \left(\frac{3}{4}\right)^8 \frac{1}{r_1^6} \ln \left[ 1 + \left(\frac{4}{3} r_1\right)^2 \right] \\ & \quad V = \frac{3}{11} \pi r_1^2 \\ n = 1, & \quad i_3 = \frac{r_1^4}{2(1 + r_1^2)}, & \quad V = \frac{\pi}{3} r_1^2 \\ n = \frac{5}{4}, & \quad i_3 = 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left\{ \frac{r_1^4}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 r_1^6 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 r_1^8 - \left(\frac{4}{5}\right)^6 r_1^{10} \ln \left[ 1 + \left(\frac{5}{4r_1}\right)^2 \right] \right\} \\ & \quad V = \frac{5\pi}{13} r_1^2 \\ n = \frac{4}{3}, & \quad i_3 = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left\{ \frac{r_1^4}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 r_1^6 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 r_1^8 \ln \left[ 1 + \left(\frac{4}{3r_1}\right)^2 \right] \right\}, & \quad V = \frac{2}{5} \pi r_1^2 \end{aligned}$$

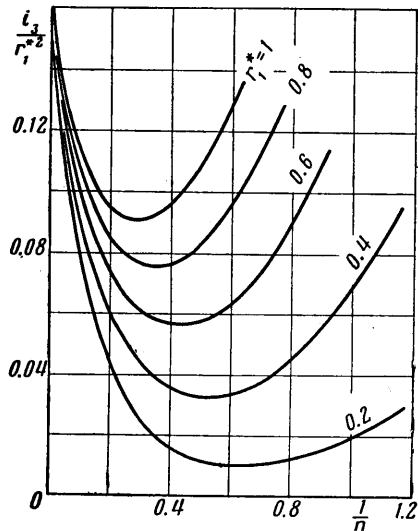
$$\begin{aligned}
 n = \frac{3}{2}, \quad i_3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left\{ r_1^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 r_1^6 \ln \left[ 1 + \left(\frac{3}{2r_1}\right)^2 \right] \right\}, \quad V = \frac{3}{7} \pi r_1^2 \\
 n = 2, \quad i_3 &= \frac{r_1^4}{8} \ln \left( 1 + \frac{4}{r_1^2} \right), \quad V = \frac{\pi}{2} r_1^2 \\
 n = 3, \quad i_3 &= \frac{r_1^3}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{3}{r_1} \right), \quad V = \frac{3}{5} \pi r_1^2 \\
 n = 4, \quad i_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^4}{4}\right)^{3/5} \left\{ \frac{1}{3} \ln \left[ 1 + \left(\frac{4}{r_1}\right)^{3/5} \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}(4/r_1)^{3/5}}{2 - (4/r_1)^{3/5}} - \frac{1}{6} \ln \left[ \left(\frac{4}{r_1}\right)^{4/5} - \left(\frac{4}{r_1}\right)^{3/5} + 1 \right] \right\}, \quad V = \frac{2}{3} \pi r_1^2 \\
 n = 5, \quad i_3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{r_1^5}{10}\right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{5/r_1 + \sqrt{10/r_1} + 1}{5/r_1 - \sqrt{10/r_1} + 1} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{10/r_1}}{1 - 5/r_1} \right\}, \quad V = \frac{5}{7} \pi r_1^2
 \end{aligned}$$

По приведенным формулам вычислена величина волнового сопротивления «степенных» тел при заданном радиусе дна  $r_1$  (фиг. 2) и при заданном объеме (фиг. 3).

Из фиг. 2 видно, что минимуму сопротивления при малых  $r_1$  соответствует  $n \approx 1.4$ , с ростом  $r_1$  растет и  $n$  (до  $n \approx 2.3$  при  $r_1 = 1$ ). При заданном объеме оптимальная величина  $n \approx 1.5$  для малых объемов (на фиг. 3 указан радиус эквивалентного по объему конуса  $r^*$ ), она возрастает до  $n = 3.5$  при радиусе эквивалентного конуса



Фиг. 2



Фиг. 3

$r^*_1 = 1$ . Если при вычислениях  $i_3$  предположить, что тело пологое, т. е.  $r' \gg 1$ , то для оптимального тела с заданным  $r_1$  получим  $n = 4/3$ , а для тела с заданным объемом  $n = \sqrt{19/3} - 1 \approx 1.517$ , в то время как без этого предположения величина  $n$  для оптимального тела вращения растет с ростом заданного  $r_1$ , или объема, т. е. тело становится все более притупленным. Величина  $n = \infty$  соответствует цилиндру с плоским торцом.

Поступило 26 XI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. II. Гостехиздат, 1934.
- Аэродинамические характеристики неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. Тр. ЦАГИ, 1961, вып. 841.
- M i e l e A. Similarity laws for optimum hypersonic bodies. VII Symp. on adv. problems and methods in fluid dynamics, 1965.