ВТОРИЧНЫЕ РЕЖИМЫ В КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Ю. П. ИВАНИЛОВ (*Москва*)

Рассмотрим стационарную конвекцию вязкой несжимаемой жидкости, заключенной между двумя пластинками, перпендикулярными направлению силы тяжести. Общеизвестна аналогия такого течения с течением вязкой жидкости между двумя вращающимися в одну сторону цилиндрами.

Примем, что плотность жидкости ρ^* связана с температурой T^* линейным соотношением $\rho^* = \rho_0\ [(1-\alpha(T^*-T_0^*)]$, где α — коэффициент объемного расширения, ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0^*.

Выберем ось x — вдоль верхней пластинки, ось y — в направлении силы тяжести. Известно, что нагретая жидкость может находиться в равновесии только в том случае, когда температура $T^* = T^*_0 + \beta y$. В дальнейшем предполагаем β положительным, а местную температуру в жидкости запишем в форме

$$T^* = T_0^* + \beta y - \theta^* \tag{1}$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\psi^* = \nu\psi,\ x^* = Lx,\ y^* = Ly, \qquad T^* = \beta LT, \qquad \theta^* = \beta L\theta \tag{2}$$

где ψ — функция тока, связанная с компонентами скорости вдоль осей x и y соотношениями $u_x = \partial\psi/\partial y$, $u_y = -\partial\psi/\partial x$.

В таких переменных стационарные течения в жидкости, называемые стационарной свободной конвекцией, описываются уравнениями [1, 2]

$$\Delta^2\psi = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, y)}, \qquad \Delta\theta = \sigma\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sigma\frac{\partial(\theta, \psi)}{\partial(x, y)} \tag{3}$$

$$\theta = \psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = 1$$

Здесь $\lambda = \alpha\beta gL^4/\nu^2$ —число Релея, $\sigma^{-1}=\varkappa/\nu$ — число Прандтля, $\varkappa$—теплопроводность. Температура найдется после определения θ по формулам (1) и (2).

Будем изучать поведение решений (3) при достаточно больших σ. Существование таких решений неоднократно доказывалось [2–5]. Ограничимся периодическими по x периода $l = 2\pi k^{-1}$ четными θ и нечетными ψ решениями (3). Удобно сделать растяжение зависимых и независимых переменных по формулам

$$\psi = \frac{\varphi}{\rho^5\sqrt{\rho}}, \qquad \theta = \frac{\vartheta}{\lambda k\rho\sqrt{\rho}}, \qquad x = \frac{\xi}{k}, \qquad y = \frac{\eta}{\rho}, \qquad \sigma = \frac{\rho^6}{\lambda k^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho}\right)$$

Величины ρ и ε связаны с σ. В дальнейшем ρ выбирается так, чтобы оно было собственным числом некоторой линейной задачи, ближайшим к значению $(\sigma\lambda k^2)^{1/6}$.

После такой замены уравнения (3) примут вид

$$L^2\varphi = \frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{1}{\rho\sqrt{\rho}}\frac{\partial(L\varphi, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)}$$

$$L\vartheta = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{1}{\lambda k\sqrt{\rho}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho}\right)\frac{\partial(\vartheta, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)}, \qquad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{k^2}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{4}$$

$$\vartheta = \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ и } \eta = \rho$$

При больших ρ решение (4) ищем в виде ряда по отрицательным степеням $\sqrt{\rho}$

$$\varphi = a\varphi_1 + \frac{a^2}{\sqrt{\rho}}\varphi_2 + \frac{a^3}{\rho}\varphi_3 + \ldots, \qquad \vartheta = a\vartheta_1 + \frac{a^2}{\sqrt{\rho}}\vartheta_2 + \frac{a^3}{\rho}\vartheta_3 + \ldots \tag{5}$$

Первое приближение удовлетворяет системе

$$\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial\eta^4} = \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}, \qquad \vartheta_1 = \varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ и } \eta = \rho \tag{6}$$

Оно имеет вид [1]

$$\begin{aligned}\varphi_1 = {} & [(\cos\rho y + {}^1\!/_3\,\pi) + \exp(-{}^1\!/_2\sqrt{3}\,\rho y)\cos({}^1\!/_2\,\rho y - {}^2\!/_3\,\pi) - \\ & -(-1)^n\exp{}^1\!/_2\sqrt{3}\,\rho(y-1)\cos({}^1\!/_2\,\rho y - {}^1\!/_2\,\rho + {}^2\!/_3\,\pi)]\sin kx + O(\exp(-{}^1\!/_2\sqrt{3}\,\rho)) \\ \vartheta_1 = {} & [-\cos(\rho y + {}^1\!/_3\,\pi) + \exp(-{}^1\!/_2\sqrt{3}\,\rho y)\cos({}^1\!/_2\,\rho y - {}^1\!/_3\,\pi) - \\ & -(-1)^n\exp{}^1\!/_2\sqrt{3}\,\rho(y-1)\cos({}^1\!/_2\,\rho y - {}^1\!/_2\,\rho + {}^1\!/_3\,\pi)]\cos kx + O(\exp(-{}^1\!/_2\sqrt{3}\,\rho))\end{aligned} \tag{7}$$

[1] Решение записано в исходных переменных.

Собственное число

$$\rho = n\pi + 1/3\,\pi, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Структура решения (7) следующая. Два последние слагаемые в φ_1 и ϑ_1 погранслойные. Они вносят существенный вклад в решения только в узкой области ширины порядка ρ^{-1} вблизи пластинок и экспоненциально убывают по мере удаления от пластинок. Течение жидкости определяется первым слагаемым в (7). Течение имеет ячеистую структуру с замкнутыми линиями тока внутри каждой ячейки. Размеры ячеек уменьшаются, число их соответственно растет с ростом ρ (σ).

Амплитуду решения a найдем из условия разрешимости уравнений для следующих приближений. Ограничимся только первым членом разложения a по степеням $\rho^{-1/2}$.

Второе приближение удовлетворяет системе

$$\frac{\partial^4\varphi_2}{\partial\eta^4} = \frac{\partial\vartheta_2}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} + \frac{1}{k\lambda}\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} - \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right) \tag{8}$$

$$\vartheta_2 = \varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ и } \eta = \rho$$

Система (8) разрешима, так как ее правая часть ортогональна решению системы, сопряженной с (6) $\varphi^* = \varphi_1$, $\vartheta^* = -\vartheta_1$. Решение системы (8) имеет вид

$$\varphi_2 = [\ldots], \quad \vartheta_2 = \frac{1}{8k\lambda}\sin\left(2\eta + \frac{2}{3}\pi\right) + [\ldots]$$

Символом [...] обозначены погранслойные члены.

Для третьего приближения имеем уравнения (9)

$$\frac{\partial^4\varphi_3}{\partial\eta^4} = \frac{\partial\vartheta_3}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2\vartheta_3}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi} + \left[\varepsilon a^{-2} - \frac{1}{4(\lambda k)^2}\cos\left(2\eta + \frac{2}{3}\pi\right)\right]\cos\left(\eta + \frac{1}{3}\pi\right)\cos\xi + [\ldots]$$

Условием разрешимости будет ортогональность правой части (9) решению однородной сопряженной системы $-\vartheta_1 = \cos(\eta + 1/3\,\pi)\cos\xi + [\ldots]$. Это условие выглядит следующим образом:

$$\varepsilon a^{-2}\int_0^\rho \cos^2\left(\eta + \frac{1}{3}\pi\right)d\eta - (2\lambda k)^{-2}\int_0^\rho \cos\left(2\eta + \frac{2}{3}\pi\right)\cos^2\left(\eta + \frac{1}{3}\pi\right)d\eta + O(1) = 0 \tag{10}$$

Погранслойные члены дадут после интегрирования ограниченную величину, обозначенную $O(1)$, в то время как вычисленные интегралы имеют порядок $O(\rho)$. Вычисляя интегралы в левой части (10), получим

$$2\varepsilon a^{-2} - (2\lambda k)^{-2} + O(\rho^{-1}) = 0 \quad \text{или} \quad a \approx \lambda k\sqrt{8\varepsilon}$$

Таким образом, решение (4) имеет вид

$$\psi = \frac{\lambda k\sqrt{8\varepsilon}}{(n\pi)^5\sqrt{n\pi}}\varphi_1 + O\left(\frac{1}{n^6}\right), \quad \theta = \frac{\sqrt{8\varepsilon}\,\nu_1}{n\pi\sqrt{n\pi}} + O(n^{-2})$$

где φ_1 и ϑ_1 определены формулой (7). Видим, что соседним точкам ветвления

$$\rho_n = n\pi + 1/3\,\pi + O(n^{-2}), \quad \rho_{n+k} = (n+k)\pi + 1/3\,\pi + O(n^{-2})$$

уравнений (3) соответствуют вторичные течения, мало отличающиеся друг от друга по скорости и кинетической энергии. Поэтому можно предположить следующее объяснение явления турбулентности. В силу малых, но конечных случайных величин возмущений вторичный режим довольно сложной ячеистой структуры переходит в один из близких к нему по энергии вторичных режимов.

Этот нестационарный процесс взаимных переходов вторичных течений и представляет собой картину турбулентности. В рамках этой гипотезы становится понятным, почему уменьшением величины внесенных возмущений можно затянуть переход к турбулентному режиму или получить нетурбулизованные вторичные режимы.

Поступило 3 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
2. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, т. 18, вып. 2, 1954.
3. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, т. 27, вып. 2, 1963.
4. Velte W. Stabelitätsverhulten und verzweigung stitionurer Lösungen der Novier—Stokessechen gleichungen. Arch. Ration. Mech and Analys. 1964, vol. 16, No 2.
5. Иванилов Ю. П., Яковлев Г. Н. Стационарная конвекция при наличии внешнего магнитного поля. ПММ, т. 30, вып. 4, 1966.