

которого равна единице, действует момент  $M = 2\pi R_1^2 \tau_{r\varphi}(R_1)$ , где  $\tau_{r\varphi}(R_1)$  — касательное напряжение на поверхности наружного цилиндра. Для касательного напряжения имеем выражение

$$\tau_{r\varphi}(R_1) = k(T_1) \omega_1^n \left( \xi \frac{d\Omega}{d\xi} \right)^n \Big|_{\xi=1}$$

Учитывая (0.3), (3.2) и (3.3), окончательно получаем

$$M = 2\pi R_1^2 k_0 \omega_1^n \left( -\frac{2}{\ln d} \right)^n c^{\frac{r n}{n+1}} \exp(-\beta T_1)$$

В выражение крутящего момента из решения задачи входит только постоянная интегрирования  $c$ , для нахождения которой приходится решать одно трансцендентное уравнение как при наличии теплообмена с внутренним цилиндром, так и при его отсутствии.

Получено 13 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизоэнтальпическом стационарном течении вязкой жидкости. ПМТФ, 1965, № 5.
2. Бернхардт Э. Переработка термопластичных материалов. Госхимиздат, 1962.
3. Гальперин Д. И., Мошев В. В., Степанова В. Г. Коллоидн. ж. 1961, т. 23, № 1.

СИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ КОНТАКТА СТРУИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Д. С. ЦЕЛЬНИК (Москва)

Рассматривается плоская линеаризованная задача о косом натекании невесомой струи идеальной несжимаемой жидкости на поверхность жидкости тяжелой. Ищутся течения с симметричными формами участка контакта. Математически приходим к задаче о собственных числах и функциях интегрального уравнения, решая которое, можно получить различные формы контакта. Предельным переходом выводится основной для бесконечно тонкой струи конечной интенсивности результат — аналогия с формами свободных колебаний струны. Излагаются некоторые результаты для рассматриваемой задачи в нелинейной постановке.

Плоская задача о натекании (вертикальном) струи на жидкость решена В. Олмстэдом и С. Рэйнором [1]. Некоторые результаты для косого натекания достаточно тонкой слабоискривленной струи имеются в работе А. П. Фролова [2]. Сведения о других работах, в основном, экспериментальных можно найти в [3].

Рассматриваемая задача имеет отношение к модели струйной завесы аппарата на воздушной подушке; по этому вопросу укажем работу Г. Ю. Степанова [4], в которой получен, в частности, результат для бесконечно тонкой струйной завесы.

§ 1. Пусть плоская струя идеальной, несжимаемой, невесомой жидкости плотности  $\rho_1$  натекает на поверхность неподвижной тяжелой жидкости плотности  $\rho_2$  по схеме фиг. 1. Будем искать течения, симметричные относительно оси ординат, помещенной посредине  $CL$ . Отобразим конформно область течения на полосу шириной  $1/2\pi$  (фиг. 2). Обозначив через  $w$  комплексный потенциал,  $v$  — модуль скорости,  $\theta$  — угол вектора скорости с осью  $x$ , рассмотрим функцию Жуковского [5]

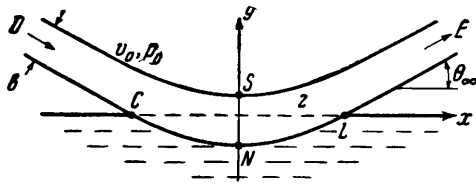
$$\omega(u) = i \ln(dw/v_0 dz) = \theta + i \ln v/v_0 = \theta + i\tau$$

Очевидно, что  $\text{Im } \omega = 0$  на  $DC$ ,  $LE$ ,  $DSE$ . При помощи интеграла Шварца для полосы находим

$$\omega(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \tau(\xi) \text{cth}(\xi - u) d\xi$$

$$(-a \leq u \leq +a) \quad (1.1)$$

$$\theta_\infty = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \tau(\xi) d\xi \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Очевидно, что

$$\theta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \tau(\xi) \operatorname{cth}(\xi - t) d\xi \quad (-a \leq t \leq +a) \quad (1.3)$$

Из условия равенства давлений на линии контакта получаем

$$\tau'(\xi) = \pi \lambda e^{-3\tau(\xi)} \sin \theta(\xi), \quad \lambda = 2\rho_2 g b / \pi^2 \rho_1 v_0^2 \quad (-a \leq \xi \leq +a) \quad (1.4)$$

Считая значения  $\tau$ ,  $\theta$  при  $-a \leq \xi \leq +a$  малыми, линеаризуем (1.4)

$$\tau'(\xi) = \pi \lambda \theta(\xi) \quad (1.5)$$

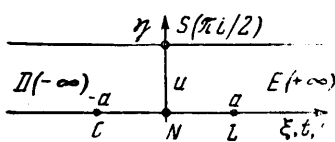
Перепишем (1.5) в виде

$$\tau(\xi) = \pi \lambda \int_{-a}^{+a} \theta(\varepsilon) \Omega(\varepsilon, \xi) d\varepsilon, \quad \Omega(\varepsilon, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon > \xi \\ 1 & \text{при } \varepsilon < \xi \end{cases}$$

подставим в (1.3) и проделаем следующие операции: переменим порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл (по  $\xi$ ), а во внешнем перейдем к промежутку  $[0, a]$ , получим

$$\theta(t) = \lambda \int_0^a \theta(\varepsilon) \ln \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon + t)}{\operatorname{sh}|\varepsilon - t|} d\varepsilon \quad (0 \leq t \leq a) \quad (1.6)$$

Будем фиксировать значения  $a$  из  $(0, \infty)$ , тогда (1.6) есть задача определения характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения с симметричным ядром. Все характеристические числа (1.6) положительны, так как ядро



Фиг. 2

$$K(\varepsilon, t) = \ln \frac{\operatorname{sh}(\varepsilon + t)}{\operatorname{sh}|\varepsilon - t|} \quad (0 \leq \varepsilon, t \leq a) \quad (1.7)$$

положительно определенное, ибо соответствующая интегральная квадратичная форма

$$(I\theta, \theta) = \int_0^a \int_0^a K(\varepsilon, t) \theta(\varepsilon) \theta(t) d\varepsilon dt > 0 \quad (1.8)$$

если только  $\|\theta\| \neq 0$ . Это может быть установлено, если опираться на отмеченный М. Г. Крейнлом [6] факт положительной определенности ядра

$$K_1(\varepsilon, t) = \ln \frac{\operatorname{sh}(1/2 A)}{2 \operatorname{sh} |1/2 \varepsilon - 1/2 t|} \quad (0 \leq \varepsilon, t \leq 2A) \quad (1.9)$$

так как квадратичная форма  $(I_1 \varphi, \varphi)$ , соответствующая  $K_1(\varepsilon, t)$ , сводится с точностью до положительного постоянного множителя к (1.8), если записать  $(I_1 \varphi, \varphi)$  для функций  $\varphi$  таких, что  $\varphi(A - \varepsilon) = -\varphi(A + \varepsilon)$ , и провести несложные замены переменных.

§ 2. Пусть ширина струи  $b \rightarrow 0$ . Заменяя в (1.6) переменные

$$\sigma = \delta l \varepsilon / \pi, \quad \chi = \delta l t / \pi \quad (\delta = \pi / a) \quad (2.1)$$

получим

$$\theta(\chi) = \frac{\pi \lambda}{\delta^2 l} \int_0^l \theta(\sigma) \delta \ln \frac{\operatorname{sh}[\pi(\sigma + \chi) / \delta l]}{\operatorname{sh}|\pi(\sigma - \chi) / \delta l|} d\sigma \quad (2.2)$$

Преобразование (2.1) равносильно переходу от полосы шириной  $1/2 \pi$  (фиг. 2) к полосе шириной  $1/2 \delta l$ , при этом  $\sigma(C, L) = \mp l$ . При  $b \rightarrow 0$  положим  $\delta \rightarrow 0$ , так что  $2b/\delta l \rightarrow 1$ , тогда из (2.2) находим

$$\theta(\chi) = v \int_0^l \theta(\sigma) K^\circ(\chi, \sigma) d\sigma \quad (0 \leq \chi \leq l)$$

$$K^\circ(\chi, \sigma) = \begin{cases} \chi & \text{при } \sigma > \chi \\ \sigma & \text{при } \sigma < \chi \end{cases} \quad v = \frac{\rho_2 g}{b \rho_1 v_0^2} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) справедливо для бесконечно тонкой струи конечной интенсивности, идеализирующей струи достаточно тонкие — при неизменном  $v$ . Из (2.3) получаем систему «собственных длин» участка контакта

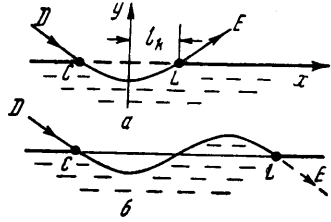
$$2l_k = (2k + 1) \pi / \sqrt{v} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

при этом]

$$y = D \cos(\sqrt{v} x) \quad (-l_k \leq x \leq l_k) \quad (2.5)$$

Можно показать, что  $\theta(E) = \theta(L)$ , т. е. бесконечно тонкая струя не имеет угловых точек. Первая симметричная форма контакта ( $k = 0$ ) изображена на фиг. 3, а; формы при  $k \neq 0$  вряд ли реализуются. Для бесконечно тонкой слабоискривленной струи (фиг. 3) из элементарных соображений несложно получить [4]

$$d^2y/dx^2 + vy = 0 \quad (2.6)$$



Фиг. 3

отсюда дополнительно к симметричным обнаруживаем (формально) кососимметричные формы, первая из которых изображена на фиг. 3, б. Не исключено, что в экспериментах за впадиной (фиг. 3, б) может наблюдаться горб, что будет напоминать размытую первую кососимметричную форму; в «чистом» же виде течение по фиг. 3, б, конечно, невозможно. Математически, впрочем, можно интерпретировать кососимметричные формы, если допустить уход струи на другой лист римановой поверхности.

Уравнение (2.6) может быть получено также из формулы (2.8) работы [2].

§ 3. Обращаясь теперь к общему случаю струи произвольной ширины, заменим в (1.6) переменные

$$x_0 = a_0^{-1} \operatorname{th} t, \quad y_0 = a_0^{-1} \operatorname{th} \varepsilon \quad (3.1)$$

( $a_0 = \operatorname{th} a$ )

Обозначив  $\lambda^\circ = a_0 \lambda$ , получим

$$\theta(x_0) = \lambda^\circ \int_0^1 \theta(y_0) \ln \frac{x_0 + y_0}{|x_0 - y_0|} \frac{dy_0}{1 - a_0^2 y_0^2} \quad (3.2)$$

Для приближенного определения характеристических чисел и собственных функций уравнения (3.2) можно использовать разложение по многочленам Чебышева [7]

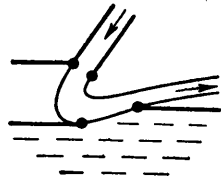
$$\ln \left| \frac{x_0 + y_0}{x_0 - y_0} \right| = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1)^{-1} T_{2m+1}(x_0) T_{2m+1}(y_0) \quad (-1 \leq x_0, y_0 \leq +1) \quad (3.3)$$

Ограничиваясь в (3.3) конечным  $m$ , приходим очевидным образом к задаче о характеристических числах и собственных векторах некоторой матрицы.

Ниже приводится найденный таким образом результат для первой формы контакта, асимптотически справедливый в случае достаточно широкой, по сравнению с длиной участка контакта, струи

$$\theta(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+1} T_{2k+1}(x_0), \quad \alpha_1 = 1, \quad \lambda_1^\circ \approx 0.6386$$

$\alpha_3 = -0.29071,$	$\alpha_9 = -0.00226,$	$\alpha_{15} = -0.00051$
$\alpha_5 = +0.00280,$	$\alpha_{11} = -0.00127,$	$\alpha_{17} = -0.00036$
$\alpha_7 = -0.00495,$	$\alpha_{13} = -0.00078,$	$\alpha_{19} = -0.00026$



Фиг. 5

Используя найденное значение  $\lambda_1^\circ$  и первые два слагаемых в выражении для  $\theta(x_0)$ , получим

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx \frac{2v_0^2}{gx_L}, \quad \frac{\theta_\infty}{\theta_L} \approx 0.7a, \quad \frac{x_L}{b} \approx \frac{2a}{\pi}, \quad y(N) \approx -0.82 b \theta_\infty$$

Схематично течение при больших  $b/x_L$  показано на фиг. 4, а; на фиг. 4, б, нанесен профиль участка контакта для частного случая:  $b = 5.4 \text{ м}$ ,  $\rho_2/\rho_1 = 770$ ,  $v_0 = 50 \text{ м/сек}$ ,  $\theta_\infty = 0.001465$ .

Заметим, что для  $n$ -й симметричной формы контакта при  $n \rightarrow \infty$  должно быть асимптотически справедливо равенство  $\rho_2/\rho_1 = \pi v_0^2/g_s$ , где через  $s$  обозначена средняя длина «полуволны» на участке контакта. Этот результат можно вывести из решения задачи о волнах на поверхности раздела двух жидкостей [1<sup>8</sup>], гл. VIII, § 12), если положить верхнюю жидкость невесомой, а скорость распространения волн равной нулю.

§ 4. В нелинейной постановке задача о симметричных формах контакта приводится к уравнению

$$\varphi = \lambda A\varphi \quad \varphi(t) \equiv 1/\pi \tau'(t)$$

$$A\varphi(t) \equiv \exp \left[ -3\pi \int_a^t \varphi(\mu) d\mu \right] \sin \left\{ \int_0^a \varphi(\varepsilon) K(\varepsilon, t) d\varepsilon \right\}$$

Фиксируем  $a$  из  $(0, \infty)$  и будем рассматривать  $A$  как оператор в пространстве  $C$  непрерывных на  $[0, a]$  функций. Оператор  $A$  вполне непрерывен и имеет производную Фреше  $A'_\varphi(0)$  — интегральный оператор  $B$ , порождаемый ядром  $K(\varepsilon, t)$ . По крайней мере первое характеристическое число  $\lambda_1$  оператора  $B$  — то, которому отвечает форма участка контакта, вырождающаяся для бесконечно тонкой струи в полу-волну синусоиды, — простое, соответствующая собственная функция неотрицательна и, как и все собственные функции оператора  $B$ , непрерывна. Эти факты следуют из [9] стр. 58 и [10] § 16. На основании принципа линеаризации [11] заключаем, что  $\lambda_1$  есть точка бифуркации уравнения  $\varphi = \lambda A\varphi$ . Можно убедиться (см. [11] стр. 220), что малые ненулевые решения этого уравнения имеются как при  $\lambda > \lambda_1$ , так и при  $\lambda < \lambda_1$  (из некоторой окрестности  $\lambda_1$ ). Для отыскания этих решений может быть использован известный из теории волн метод А. И. Некрасова.

Аналогичный подход может оказаться полезным при рассмотрении плоской задачи о струйной завесе аппарата на воздушной подушке над поверхностью тяжелой жидкости (фиг. 5). Для случая бесконечно тонкой струи, описываемой уравнением (2.6), различные теоретически возможные формы участка контакта немедленно могут быть обнаружены. Нелинейная задача о течении по фиг. 5 может быть поставлена как задача о точках бифуркации.

Поступило 3 I 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Olmstead W. E., Raupor S. Depression of an infinite liquid surface by an incompressible gas jet. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, No 4.
2. Фролов А. П. Плоская слабоискривленная струя идеальной несжимаемой жидкости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Vank's R. B. The hydrodynamics of a plane gas jet, impinging on a moving liquid. Hydraulics and fluid mechanics. Proc. first Australian Conf. Univ. West. Austr., 1962. Pergamon Press. Oxford, 1964.
4. Степанов Г. Ю. Особенности гидродинамического расчета струйной завесы над поверхностью воды. Судостроение, 1965, № 9.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
6. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 6.
7. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. ч. 1, Физматгиз, 1963.
9. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Успехи матем. наук, 1948, т. III, вып. 1 (23).
10. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959.
11. Вилленкин Н. Я. и др. Функциональный анализ. Справ. мат. библи. Наука, 1964.