НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. БОСТАНДЖИЯН, С. М. ЧЕРНЯЕВА

(Москва)

В работе [1] исследовалось течение ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскостями, безнапорное осевое течение в кольцевом зазоре и течение между двумя вращающимися цилиндрами при наличии диссипации энергии в предположении, что вязкость жидкости связана с температурой соотношением Рейнольдса

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta T} \qquad (\mu_0, \quad \beta = \mathrm{const}) \tag{0.1}$$

Многие полимерные расплавы и растворы по своим свойствам отличаются от обычных ньютоновских жидкостей. Для большинства из них связь между касательным напряжением и градиентом скорости в случае одномерного течения удовлетворительно описывается «степенным законом» [2]

$$\tau = k\left(\frac{dv}{dy}\right)^n \tag{0.2}$$

где τ — касательное напряжение, dv/dy — градиент скорости, k и n — величины, в общем случае зависящие от температуры, причем k зависит от температуры сильно, n — слабо [3]. Обычно $n < 1$. При $n = 1$ «степенной закон» превращается в закон Ньютона, а k выражает динамическую вязкость ньютоновской жидкости.

В настоящей работе исследуются упомянутые выше типы течений для неньютоновской жидкости с реологическим уравнением (0.2). В силу слабой зависимости показателя n от температуры предполагается, что n от температуры не зависит, а зависимость k от температуры задается в виде

$$k = k_0 e^{-\beta T} \tag{0.3}$$

1. Течение между двумя параллельными пластинами. Пусть слой неньютоновской жидкости с реологическим уравнением (0.2) находится между двумя параллельными пластинами $y = -h$ и $y = h$, верхняя из которых движется в положительном направлении оси x с постоянной скоростью V. На стенках с температурами T_0 и T_1 осуществляется прилипание жидкости ($T_0 > T_1$). Систему уравнений движения и теплопроводности в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d}{d\eta}\left[e^{-n\theta}\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^n\right] = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 2\varkappa e^{-n\theta}\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^{n+1} = 0 \tag{1.1}$$

где введены следующие обозначения для безразмерных переменных и параметра:

$$v = \frac{v_x}{V}, \qquad \theta = \frac{\beta}{n}(T - T_1), \qquad \eta = \frac{y}{h}, \qquad \varkappa = \frac{k_0 \beta V^{n+1}}{2n\lambda J h^{n-1}} \exp(-\beta T_1) \tag{1.2}$$

(J — механический эквивалент тепла, λ — коэффициент теплопроводности жидкости).

Систему (1.1) нужно решить при граничных условиях

$$v = 1, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = 1 \qquad (\theta_0 = \beta/n\,(T_0 - T_1)) \tag{1.3}$$
$$v = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{при } \eta = -1$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (1.1) и обозначив постоянную интегрирования через $c^{n/(n+1)}$, получим

$$\frac{dv}{d\eta} = c^{1/2(\alpha+1)} e^{\theta} \qquad \left(\alpha = \frac{1-n}{1+n}\right) \tag{1.4}$$

Исключение производной скорости из второго уравнения системы (1.1) дает

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 2\varkappa c e^{\theta} = 0 \tag{1.5}$$

Решение этого уравнения имеет вид [1]

$$\theta = \ln a - 2\ln \operatorname{ch}(b + \sqrt{a\varkappa c}\,\eta) \tag{1.6}$$

где a и b — постоянные интегрирования, причем можно считать, что $b > 0$.

Подставляя (1.6) в (1.4), получим

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{a c^{1/2(\alpha+1)}}{\operatorname{ch}^2(b + \sqrt{a\varkappa c}\,\eta)}$$

Решение этого уравнения с учетом первого граничного условия (1.3) имеет вид

$$v = 1 - c^{1/2\alpha}\sqrt{a/\varkappa}\,[\mathrm{th}\,(b + \sqrt{a\varkappa c}) - \mathrm{th}\,(b + \sqrt{a\varkappa c}\,\eta)] \tag{1.7}$$

Удовлетворяя (1.6) и (1.7) остальным трем граничным условиям (1.3), получим систему трех трансцендентных уравнений для постоянных интегрирования a, b, c

$$\begin{gathered}\mathrm{ch}^2(b + \sqrt{a\varkappa c}) = a, \qquad \mathrm{ch}^2(b - \sqrt{a\varkappa c}) = ae^{-\theta_0} \\ \mathrm{th}\,(b + \sqrt{a\varkappa c}) - \mathrm{th}\,(b - \sqrt{a\varkappa c}) = c^{-1/2\alpha}\sqrt{\varkappa / a}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Из третьего уравнения (1.8) при помощи первых двух уравнений получаем

$$a = 1 + \frac{c^\alpha}{4\varkappa}(\varkappa c^{-\alpha} + e^{\theta_0} - 1)^2 \tag{1.9}$$

При возрастании $\varkappa$ от 0 до ∞ постоянная a убывает от ∞ до своего минимального значения $a_0 = e^{\theta_0}$, достигаемого при $\varkappa_0 = c^\alpha\,(e^{\theta_0} - 1)$, затем монотонно возрастает до ∞. Учитывая, что $b > 0$, первые два уравнения (1.8) можно переписать так:

$$b + \sqrt{a\varkappa c} = \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}), \qquad b - \sqrt{a\varkappa c} = \pm\ln\left(\sqrt{ae^{\theta_0}} + \sqrt{ae^{\theta_0} - 1}\right) \tag{1.10}$$

Во втором уравнении при $\varkappa < \varkappa_0$ следует брать знак плюс, при $\varkappa > \varkappa_0$ — знак минус. Из системы (1.10) имеем

$$b = \frac{1}{2}[\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \pm \ln(\sqrt{ae^{\theta_0}} + \sqrt{ae^{\theta_0} - 1})] \tag{1.11}$$

$$c = \frac{1}{4a\varkappa}[\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \mp \ln(\sqrt{ae^{\theta_0}} + \sqrt{ae^{\theta_0} - 1})]^2 \tag{1.12}$$

Верхний знак берется при $\varkappa < \varkappa_0$, нижний — при $\varkappa > \varkappa_0$. Заменив в (1.12) постоянную a через c согласно (1.9), получим трансцендентное уравнение относительно c. При вычислении корня этого уравнения следует помнить о сказанном выше относительно выбора знака, так как $\varkappa_0$, в свою очередь, зависит от c. Определив c, из (1.9) находим a, а из (1.11) — b. Рассмотрим два частных случая.

а) $\theta_0 = 0$ (обе пластины имеют одинаковую температуру). Из (1.8) получаем

$$b = 0, \qquad a = 1 + \frac{1}{4}\varkappa c^{-\alpha}, \qquad c = \frac{1}{\varkappa a}\ln^2(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \tag{1.13}$$

Из (1.6) видно, что при $b = 0$ максимальная температура достигается на средней плоскости и равна $\theta = \ln a$.

б) $d\theta / d\eta = 0$ при $\eta = -1$ (нижняя пластина теплоизолирована). Удовлетворяя (1.6) этому условию, получим $b = \sqrt{a\varkappa c}$. Для постоянных интегрирования находим

$$a = 1 + \varkappa c^{-\alpha}, \qquad c = \frac{1}{4a\varkappa}\ln^2(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}), \qquad b = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \tag{1.14}$$

Максимальная температура достигается на теплоизолированной поверхности и равна $\theta = \ln\,a$.

2. Осевое течение в кольцевом зазоре между двумя бесконечными цилиндрами. Пусть неньютоновская жидкость с реологическим уравнением (0.2) находится между двумя соосными цилиндрами, внешний из которых движется в положительном направлении оси z с постоянной скоростью V, а внутренний неподвижен. Радиус и температура внутреннего цилиндра R_0 и T_0, внешнего — R_1 и T_1 ($T_0 > T_1$). Систему уравнений движения и теплопроводности в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi e^{-n\theta}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^n\right] = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + 2\varkappa e^{-n\theta}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^{n+1} = 0 \tag{2.1}$$

где $v = v_z / V$, $\xi = r / R_1$, θ и $\varkappa$ такие же, как и в первой задаче.

Систему (2.1) нужно решить при граничных условиях

$$v = 1, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \xi = 1; \quad v = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{при } \xi = d \quad (d = R_0 / R_1) \tag{2.2}$$

Эту задачу можно свести к задаче, рассмотренной в первом параграфе.

Проинтегрируем первое уравнение системы (2.1) и результат интегрирования представим в виде

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{2}{\ln d}\,\xi^{-1/n} c^{1/2(\alpha+1)}\, e^{\theta} \tag{2.3}$$

где c — постоянная интегрирования. Заменяя производную скорости во втором уравнении (2.1) согласно (2.3), получим

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+2\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1}\xi^{-\frac{n+1}{n}}e^{\theta}=0 \tag{2.4}$$

В (2.3) и (2.4) сделаем замену функции и переменной

$$\theta=u+\frac{1-n}{n}\ln\xi, \qquad \eta=1-\frac{2\ln\xi}{\ln d} \tag{2.5}$$

В результате такой замены получим

$$\frac{dv}{d\eta}=c^{1/2(\alpha+1)}e^{u}, \qquad \frac{d^2u}{d\eta^2}+2\varkappa_1 ce^{u}=0 \qquad \left(\varkappa_1=\varkappa\left(-\frac{\ln d}{2}\right)^{1-n}\right) \tag{2.6}$$

Граничные условия (2.2) примут вид (2.7)

$$v=1, \quad u=0 \quad \text{при } \eta=1; \qquad v=0, \quad u_0=\theta_0-\frac{1-n}{n}\ln d \quad \text{при } \eta=1$$

Сравнивая уравнения (1.4), (1.5) и граничные условия (1.3) с уравнениями (2.6) и граничными условиями (2.7), видим, что последние отличаются от первых тем, что вместо $\varkappa$ фигурирует $\varkappa_1$, а вместо θ_0 — u_0. Легко написать теперь решение этой задачи воспользовавшись решением предыдущей задачи

$$\theta=\ln a\xi^{\frac{1-n}{n}}-2\ln\operatorname{ch}\left[b+\left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1}\right)^{1/2}\ln\frac{\xi}{\sqrt{d}}\right] \tag{2.8}$$

$$v=1-c^{1/2\alpha}\left(\frac{\alpha}{\varkappa}\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{1-n}\right)^{1/2}\left[\operatorname{th}\left(b+\left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2}\right)-\right.$$

$$\left.-\operatorname{th}\left(b+\left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1}\right)^{1/2}\ln\frac{\xi}{\sqrt{d}}\right)\right] \tag{2.9}$$

Для постоянных интегрирования a, b, c имеем систему

$$a=1+\frac{c^{\alpha}}{4\varkappa}\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{1-n}\left[\varkappa c^{-\alpha}\left(-\frac{\ln d}{2}\right)^{1-n}+e^{\theta_0}d^{\frac{n-1}{n}}-1\right]^2 \tag{2.10}$$

$$b=\frac{1}{2}\left\{\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\pm\ln\left[\left(ae^{\theta_0}d^{\frac{n-1}{n}}\right)^{1/2}+\left(ae^{\theta_0}d^{\frac{n-1}{n}}-1\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{2.11}$$

$$c=\frac{1}{4a\varkappa}\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{1-n}\left\{\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\mp\ln\left[\left(ae^{\theta_0}d^{\frac{n-1}{n}}\right)^{1/2}+\left(ae^{\theta_0}d^{\frac{n-1}{n}}-1\right)^{1/2}\right]\right\}^2 \tag{2.12}$$

В (2.11) и (2.12) верхний знак берется при $\varkappa<\gamma$, нижний — при $\varkappa>\gamma$, где

$$\gamma=c^{\alpha}\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{1-n}\left(e^{\theta_0}d^{\frac{n-1}{n}}-1\right) \tag{2.13}$$

§ 3. Течение между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами. Пусть неньютоновская жидкость с реологическим уравнением (0.2) находится между двумя коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых неподвижен, а внешний вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 в сторону увеличения угла φ. Радиус и температура внутреннего цилиндра R_0, T_0, внешнего — R_1, T_1 ($T_0>T_1$). Систему уравнений движения и теплопроводности в безразмерной форме запишем так:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{n+2}e^{-n\theta}\left(\frac{d\Omega}{d\xi}\right)^{n}\right]=0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+2\varkappa e^{-n\theta}\left(\xi\frac{d\Omega}{d\xi}\right)^{n+1}=0 \tag{3.1}$$

где ξ и θ прежние и

$$\Omega=\frac{\omega}{\omega_1}, \qquad \varkappa=\frac{k_0\beta\omega_1^{n+1}R_1^2}{2n\lambda J}\exp(-\beta T_1)$$

Граничные условия:

$$\Omega=1, \quad \theta=0 \quad \text{при } \xi=1; \qquad \Omega=0, \quad \theta=\theta_0 \quad \text{при } \xi=d \tag{3.2}$$

Эту задачу также можно свести к задаче, рассмотренной в первом параграфе. Проинтегрируем первое уравнение системы (3.1) и результат представим в виде

$$\frac{d\Omega}{d\xi}=-\frac{2}{\ln d}c^{1/2(\alpha+1)}\xi^{-\frac{n+2}{n}}e^{\theta} \tag{3.3}$$

где c — постоянная интегрирования. Исключая при помощи (3.3) производную угловой скорости из второго уравнения системы (3.1), получим

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + 2\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1} \xi^{-\frac{2(n+1)}{n}} e^{\theta} = 0 \qquad (3.4)$$

Если в (3.3) и (3.4) сделать замену функции и переменной

$$\theta = u + \frac{2}{n}\ln\xi, \qquad \eta = 1 - \frac{2\ln\xi}{\ln d} \qquad (3.5)$$

то приходим к системе, совпадающей с (2.6)

$$\frac{d\Omega}{d\eta} = c^{1/2(\alpha+1)} e^u, \qquad \frac{d^2u}{d\eta^2} + 2\varkappa_1 c e^u = 0 \qquad (3.6)$$

Граничные условия (3.2) при этом преобразуются к виду

$$\Omega = 1, \quad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = 1; \qquad \Omega = 0, \quad u_0 = \theta_0 - 2/n \ln d \text{ при } \eta = -1 \qquad (3.7)$$

Таким образом, снова пришли к задаче первого параграфа. Решение этой задачи можно записать в виде

$$\theta = \ln a\xi^{2/n} - 2\ln \operatorname{ch}\left[b + \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1}\right)^{1/2} \ln\frac{\xi}{\sqrt{d}}\right] \qquad (3.8)$$

$$\Omega = 1 - c^{1/2\alpha}\left(\frac{a}{\varkappa}\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{1-n}\right)^{1/2}\left\{\operatorname{th}\left[b + \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2}\right] - \right.$$

$$\left. - \operatorname{th}\left[b + \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1}\right)^{1/2}\ln\frac{\xi}{\sqrt{d}}\right]\right\} \qquad (3.9)$$

Постоянные интегрирования a, b, c определяются из системы (2.10) — (2.12), если в ней и в (2.13) вместо $d^{(n-1)/n)}$ написать $d^{-2/n}$.

Рассмотрим случай отсутствия теплообмена с внутренним цилиндром. В этом случае поле температур и поле скоростей определяются формулами (3.8) и (3.9). Для определения постоянных интегрирования a, b, c имеем граничные условия

$$\theta = 0 \quad \text{при } \xi = 1; \qquad d\theta/d\xi = 0, \qquad \Omega = 0 \quad \text{при } \xi = d$$

Удовлетворив этим граничным условиям, получаем

$$\operatorname{ch}^2\left\{b + \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2}\right\} = a, \qquad \operatorname{th}\left\{b - \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2}\right\} =$$

$$= \left\{n\left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n+1}\right)^{1/2}\right\}^{-1} \qquad (3.10)$$

$$\operatorname{th}\left\{b + \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2}\right\} - \operatorname{th}\left\{b - \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2}\right\} = c^{-1/2\alpha}\left(\frac{\varkappa}{a}\left(-\frac{\ln d}{2}\right)^{1-n}\right)^{1/2}$$

Эту систему после некоторых преобразований можно представить в виде, удобном для вычислений

$$a = 1 + \varkappa c^{-\alpha}(-{}^1/_2 \ln d)^{1-n} + \frac{1}{n^2\varkappa c}(-{}^1/_2\ln d)^{n+1} - {}^1/n \ln d c^{-1/2(\alpha+1)} \qquad (3.11)$$

$$\ln\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^2 (n\sqrt{a\varkappa c(-2/\ln d)^{n+1}} - 1)}{n\sqrt{a\varkappa c(-2/\ln d)^{n+1}} + 1} = 4\left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2} \qquad (3.12)$$

$$b = \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) - \left(a\varkappa c\left(-\frac{2}{\ln d}\right)^{n-1}\right)^{1/2} \qquad (3.13)$$

Заменяя в (3.12) постоянную a согласно (3.11), получаем трансцендентное уравнение для определения постоянной c. Определив c, из (3.11) находим a, а из (3.13) — b.

Задача этого параграфа приложима к ротационному вискозиметру для учета разогрева массы от внутреннего трения. Если вспомнить, что полимерные расплавы и растворы в большинстве случаев сильно вязкие жидкости, а вязкость сильно зависит от температуры, то необходимость такого учета становится очевидной.

Вычислим крутящий момент, который является необходимым элементом для обработки экспериментальных данных. На поверхность наружного цилиндра, высота которого равна единице, действует момент $M = 2\pi R_1^2 \tau_{r\varphi}(R_1)$, где $\tau_{r\varphi}(R_1)$ — касательное напряжение на поверхности наружного цилиндра. Для касательного напряжения имеем выражение

$$\tau_{r\varphi}(R_1) = k(T_1)\,\omega_1^n \left(\xi \frac{d\Omega}{d\xi}\right)^n \Bigg|_{\xi=1}$$

Учитывая (0.3), (3.2) и (3.3), окончательно получаем

$$M = 2\pi R_1^2 k_0 \omega_1^n \left(-\frac{2}{\ln d}\right)^n c^{\frac{n}{n+1}} \exp(-\beta T_1)$$

В выражение крутящего момента из решения задачи входит только постоянная интегрирования c, для нахождения которой приходится решать одно трансцендентное уравнение как при наличии теплообмена с внутренним цилиндром, так и при его отсутствии.

Поступило 13 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости. ПМТФ, 1965, № 5.
2. Бернхардт Э. Переработка термопластичных материалов. Госхимиздат, 1962.
3. Гальперин Д. И., Мошев В. В., Степанова В. Г. Коллоидн. ж. 1961, т. 23, № 1.

СИММЕТРИЧНЫЕ ФОРМЫ КОНТАКТА СТРУИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Д. С. ЦЕЛЬНИК (Москва)

Рассматривается плоская линеаризованная задача о косом натекании невесомой струи идеальной несжимаемой жидкости на поверхность жидкости тяжелой. Ищутся течения с симметричными формами участка контакта. Математически приходим к задаче о собственных числах и функциях интегрального уравнения, решая которое, можно получить различные формы контакта. Предельным переходом выводится основной для бесконечно тонкой струи конечной интенсивности результат — аналогия с формами свободных колебаний струны. Излагаются некоторые результаты для рассматриваемой задачи в нелинейной постановке.

Плоская задача о натекании (вертикальном) струи на жидкость решена В. Олмстэдом и С. Рэйнором [1]. Некоторые результаты для косого натекания достаточно тонкой слабоискривленной струи имеются в работе А. П. Фролова [2]. Сведения о других работах, в основном, экспериментальных можно найти в [3].

Рассматриваемая задача имеет отношение к модели струйной завесы аппарата на воздушной подушке; по этому вопросу укажем работу Г. Ю. Степанова [4], в которой получен, в частности, результат для бесконечно тонкой струйной завесы.

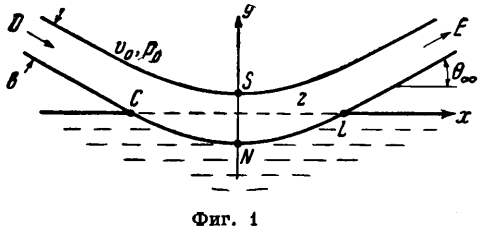
§ 1. Пусть плоская струя идеальной, несжимаемой, невесомой жидкости плотности ρ_1 натекает на поверхность неподвижной тяжелой жидкости плотности ρ_2 по схеме фиг. 1. Будем искать течения, симметричные относительно оси ординат, помещенной посредине CL. Отобразим конформно область течения на полосу шириной $^1/_2\pi$ (фиг. 2). Обозначив через w комплексный потенциал, v — модуль скорости, θ — угол вектора скорости с осью x, рассмотрим функцию Жуковского [5]

$$\omega(u) = i \ln (dw/v_0\, dz) = \theta + i \ln v/v_0 = \theta + i\tau$$

Очевидно, что $\operatorname{Im}\omega = 0$ на DC, LE, DSE. При помощи интеграла Шварца для полосы находим

$$\omega(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \tau(\xi) \operatorname{cth}(\xi - u)\, d\xi \qquad (-a \leqslant u \leqslant +a) \qquad (1.1)$$

$$\theta_\infty = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \tau(\xi)\, d\xi \qquad (1.2)$$



Фиг. 1