

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

Л. В. ПАШИННИНА (Москва)

В практике нередко встречаются случаи, когда по поверхности твердого тела течет тонкий слой вязкой жидкости, граничащей с газом. Такие течения возможны при оплавлении тел, движущихся в газе с большой скоростью, при различных видах пленочного охлаждения, а также в химической промышленности, когда жидкие продукты конденсируются на стенках каналов, по которым течет газ, и в других случаях. Величину касательного напряжения на свободной поверхности жидкости, возникающего вследствие газового потока, можно рассчитать, пользуясь теорией пограничного слоя в газе, или определить экспериментально.

В данной статье рассматривается плоское установившееся течение слоя вязкой жидкости, ограниченного твердой стенкой и свободной поверхностью.

§ 1. Постановка задачи. Примем твердую стенку за плоскость $y = 0$, уравнение свободной поверхности $y = f(x)$. Предполагается, что движение происходит под действием массовой силы g и постоянного касательного напряжения τ , приложенного к свободной поверхности (фигура). Условимся называть пуазейлевской формой течения такое течение, при котором скорости частиц направлены параллельно оси x и зависят только от y . В безразмерных переменных (расход жидкости Q , глубина потока h) распределение скоростей, давление и расход пуазейлевской формы течения имеют вид:

$$u^* = \frac{R \cos \alpha}{2F} y^2 + R \left(\tau - \frac{\cos \alpha}{F} \right) y, \quad p^* = -\frac{\sin \alpha}{F} (y - 1), \quad Q^* = \frac{R}{2} \left(\tau - \frac{2 \cos \alpha}{F} \right) \quad (1.1)$$

Здесь R — число Рейнольдса, F — число Фруда.

Помимо пуазейлевской формы течения, поставленная задача допускает еще бесконечное множество различных установившихся форм движения. Будем разыскивать те из них, при которых свободная поверхность имеет форму волны, т. е. периодические по x . Для изучения таких форм движения удобно ввести систему координат, которая движется с некоторой постоянной скоростью W . Функция потока искомого течения должна удовлетворять уравнениям Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{1}{F} \cos \alpha \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{1}{F} \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.2)$$

Исключая давление перекрестным дифференцированием, получим для функции тока уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi \quad (1.3)$$

Граничные условия на дне потока

$$\psi = 0, \quad d\psi/dy = -W \quad \text{при } y = 0 \quad (1.4)$$

На поверхности потока должно быть выполнено кинематическое условие

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{при } y = f(x) \quad (1.5)$$

и два динамических, соответствующих заданному касательному напряжению и отсутствию нормального напряжения

$$p_n \tau = \tau \quad \text{при } y = f(x), \quad p_{nn} = 0 \quad \text{при } y = f(x) \quad (1.6)$$

§ 2. Решение задачи в линейной постановке. Будем рассматривать возможные стационарные течения, представляющие собой волны периодического типа, распространяющиеся по поверхности пленки. Будем искать такие формы волновых течений, для которых распределение скоростей, давление и форма свободной поверхности мало отличаются от пуазейлевских

$$U = u^* + u, \quad V = v, \quad P = p^* + p, \quad f(x) = 1 + \eta(x)$$

Здесь p^* и u^* — давление и скорость распространения пуазейлевского течения, определяемые формулами (1.1); u , v , p и $\eta(x)$ — величины малые.

Представим функцию тока искомого волнового течения в виде

$$\Psi = \psi^* + \psi \quad \left(\psi^* = \frac{R \cos \alpha}{6F} y^3 + \frac{R(\tau F - \cos \alpha)}{2F} y^2 - Wy \right)$$

Здесь ψ^* — функция тока пуазейлевского течения.

Тогда из (1.3) получим для ψ следующее линеаризованное уравнение:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi + \frac{R \cos \alpha}{F} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$

Функция ψ , согласно (1.4) — (1.6), должна удовлетворять следующим линеаризованным граничным условиям:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 && \text{при } y = 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \left(R\tau - \frac{R \cos \alpha}{2F} - W \right) \frac{df}{dx} && \text{при } y = f(x) \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -f \frac{R \cos \alpha}{F} && \text{при } y = f(x) \\ -p - \frac{2}{R} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y} + 2\tau \frac{df}{dx} &= -f \frac{R \sin \alpha}{F} && \text{при } y = f(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Разыскивая волновые течения периодического типа, функцию тока и форму свободной поверхности можно искать в виде

$$\psi = e^{i\epsilon x} Y(y), \quad \eta(x) = Ae^{i\epsilon x} \quad (2.3)$$

Так как пленка предполагается тонкой, то будем рассматривать только длинные волны, т. е. такие, длина которых $\lambda = 2\pi/\epsilon$ велика по сравнению с глубиной (характерное значение которой принято за единицу). Таким образом, в этой задаче ϵ является малым параметром.

С точностью до малых порядка $O(\epsilon^2)$ из (2.1) получим

$$Y^{IV} + i\epsilon R \left(\frac{R \cos \alpha}{2F} y^2 + R \frac{\tau F - \cos \alpha}{F} y - W \right) Y'' - \frac{i\epsilon R^2 \cos \alpha}{F} Y = 0 \quad (2.4)$$

Кроме того, функция $Y(y)$ должна удовлетворять, согласно (2.2), следующим граничным условиям с точностью до ϵ^k ($k \geq 2$)

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = A(-R\tau + RF^{-1} \cos \alpha + W), \quad Y''(1) = -ARF^{-1} \cos \alpha \quad (2.5)$$

$$Y'(0) = 0, \quad Y'''(1) + i\epsilon R \left(W + \frac{R \cos \alpha}{2F} - R\tau \right) Y'(1) + i\epsilon R^2 \tau Y(1) = i\epsilon A \frac{\sin \alpha}{F}$$

Последнее условие получено из последнего граничного условия (2.2) после дифференцирования его по x и подстановки p_x и p_y из уравнений движения.

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$Y(y) = C_1 Y_1(y) + C_2 Y_2(y) + C_3 Y_3(y) + C_4 Y_4(y)$$

где $Y_i(y)$ — линейно-независимые частные решения уравнения (2.4), C_i — произвольные постоянные. Так как коэффициенты уравнения (2.4) являются аналитическими функциями ϵ , то решения также должны быть аналитическими по ϵ , и их можно представить в виде рядов

$$Y_i = Y_i^{(0)} + \epsilon Y_i^{(1)} + \dots \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Выберем

$$Y_1^{(0)} = 1, \quad Y_2^{(0)} = y, \quad Y_3^{(0)} = y^2, \quad Y_4^{(0)} = y^3$$

Первые два граничных условия (2.6) определяют постоянные $C_1 = C_2 = 0$.

Для $Y_3^{(1)}$ получим уравнение с точностью до $O(\epsilon^2)$

$$\frac{\partial^4 Y_3^{(1)}}{\partial y^4} - i\epsilon R \left(\frac{R \cos \alpha}{2F} y^2 + R \frac{\tau F - \cos \alpha}{F} y - W \right) \frac{\partial^2 Y_3^{(0)}}{\partial y^2} - i\epsilon \frac{R^2 \cos \alpha}{F} Y_3^{(0)} = 0$$

или

$$\frac{\partial^4 Y_3^{(1)}}{\partial y^4} = 2i\epsilon R^2 (\tau - F^{-1} \cos \alpha) y - 2i\epsilon R W$$

Отсюда

$$Y_3^{(1)} = -\frac{2i\epsilon RW}{4!} y^4 + \frac{2}{5!} i\epsilon R^2 (\tau - F^{-1} \cos \alpha) y^5 \quad (2.6)$$

и соответственно

$$Y_3(y) = y^3 - \frac{1}{12} i\epsilon RW y^4 + \frac{1}{60} i\epsilon R^2 (\tau - F^{-1} \cos \alpha) y^5 + O(\epsilon^2) \quad (2.7)$$

Аналогично получаем

$$Y_4(y) = y^3 - \frac{1}{20} i\epsilon RW y^5 + \frac{1}{60} i\epsilon R (\tau - F^{-1} \cos \alpha) y^6 + \frac{1}{420} i\epsilon R^2 F^{-1} \cos \alpha y^7 + O(\epsilon^2) \quad (2.8)$$

Последние три граничные условия (2.5) после подстановки в них (2.7) и (2.8) можно рассматривать как систему однородных, линейных уравнений относительно неизвестных C_3 , C_4 и A . Для того чтобы эта система была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель

$$\|a_{ij}\| = 0$$

и

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \frac{1}{60} i\epsilon R F^{-1} (R\tau F - \cos \alpha) - \frac{1}{12} i\epsilon RW \\ a_{12} &= 1 - \frac{1}{70} i\epsilon R^2 F^{-1} \cos \alpha + \frac{1}{60} i\epsilon R^2 \tau - \frac{1}{20} i\epsilon RW \\ a_{13} &= \frac{1}{2} R F^{-1} \cos \alpha - R\tau - W \\ a_{21} &= 2 + \frac{1}{3} i\epsilon R F^{-1} (R\tau F - R \cos \alpha) - i\epsilon RW \\ a_{22} &= 6 - \frac{1}{5} i\epsilon R^2 F^{-1} \cos \alpha + \frac{1}{2} i\epsilon R^2 \tau - i\epsilon RW \\ a_{23} &= -R F^{-1} \cos \alpha, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 6, \quad a_{33} = i\epsilon R F^{-1} \sin \alpha \end{aligned}$$

Отсюда можно вывести условие устойчивости Кузнецовского потока, что было сделано в работе [1]. После ряда преобразований с точностью до $O(\epsilon^2)$ получим

$$W = R\tau - R F^{-1} \cos \alpha + O(\epsilon^2) \quad (2.9)$$

Таким образом, при решении задачи в линейной постановке скорость распространения длинных волн $\dot{W}$ получается не зависящей от длины волны. Амплитуда волны A остается произвольной, не зависящей ни от длины волны, ни от скорости ее распространения. Определение этих зависимостей требует решения задачи в нелинейной постановке с рассмотрением малых величин более высокого порядка.

§ 3. Нелинейная задача. Рассматривая задачу в нелинейной постановке, необходимо исходить из нелинеаризованных уравнений (1.2), (1.3) и граничных условий (1.4), (1.5), (1.6). Но ввиду того, что волны рассматриваются только длинные и существует малый параметр $\epsilon = \lambda^{-1}$, можно, в соответствии с общей схемой метода узких полос [2], сделать замену $x \rightarrow x/\epsilon$.

Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \epsilon R \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right] + \dots \quad (3.1)$$

Выпишем еще условия, которым должна удовлетворять функция ψ

$$\psi = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -W \quad \text{при } y = 0 \quad (3.2)$$

Условие (1.5) равносильно условию

$$\psi = q \quad \text{при } y = f(x) \quad (3.3)$$

так как (1.5) представляет собой уравнение линии тока.

Здесь $q = \text{const}$ — расход жидкости в подвижной системе координат. Из (1.6) и (1.7) получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = R\tau \quad \text{при } y = f(x), \quad -pR + 2\epsilon \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} f_x - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad \text{при } y = f(x) \quad (3.4)$$

Покажем, что задачу можно привести к отысканию периодических решений дифференциального уравнения второго порядка.

Будем искать функцию тока ψ в виде ряда по степеням малого параметра ϵ , т. е.

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \dots \quad (3.5)$$

Тогда для функции ψ_0 будем иметь задачу

$$\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial y^4} = 0, \quad \psi_0|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial y}|_{y=0} = -W, \quad \psi_0|_{y=f(x)} = q, \quad \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}|_{y=f(x)} = R\tau$$

Отсюда получаем

$$\psi_0 = a_0 y^3 + b_0 y^2 - W y, \quad a_0 = \frac{R \tau f^2 - 2Wf - 2q}{4f^3}, \quad b_0 = \frac{-R \tau f^2 + 6Wf + 6q}{4f^2} \quad (3.6)$$

Если предположить, что амплитуда волны мала по сравнению с глубиной, т. е. что $f(x) = 1 + \eta(x)$, где $\eta(x)$ мало, и сохранить только члены второго порядка малости, то получим

$$a_0 = 1/4 [(R\tau - 2W - 2q) + \eta(-2R\tau + 4W + 6q) + \eta^2(R\tau - 6W - 12q)] \\ b_0 = 1/4 [(-R\tau + 6W + 6q) + \eta(-6W - 12q) + \eta^2(6W + 18q)] \quad (3.7)$$

Аналогично получим

$$\psi_1 = R\eta' \{ 1/1120 [(-R^2\tau^2 + 6R\tau W + 8R\tau q - 8W^2 - 20Wq - 12q^2) + \\ + \eta(3R^2\tau^2 - 24R\tau W - 40R\tau q + 40W^2 + 120Wq + 84q^2)] y^7 + \\ + 1/480 [(R^2\tau^2 - 10R\tau W - 12R\tau q + 24W^2 + 60Wq + 36q^2) + \eta(-2R^2\tau^2 + \\ + 42R\tau W + 48R\tau q - 96W^2 - 300Wq - 216q^2)] y^6 + 1/40 [(R\tau W + R\tau q - 5W^2 - \\ - 12Wq - 6q^2) + \eta(-2R\tau W - 3R\tau q + 15W^2 + 48Wq + 30q^2)] y^5 + 1/8 [(W^2 + 2Wq) + \\ + \eta(-2W^2 - 6Wq)] y^4 \} + a_1 y^3 + b_1 y^2. \\ a_1 = -1/3840 R\eta' [(19R^2\tau^2 + 68R\tau W + 30R\tau q + 96W^2 - 96Wq - 864q^2) + \\ + \eta(19R^2\tau^2 + 588R\tau W - 30R\tau q - 96W^2 + 192Wq + 2592q^2)] \quad (3.8) \\ b_1 = 1/1120 R\eta' [(5R^2\tau^2 - 12R\tau W + 2R\tau q - 16W^2 - 96Wq - 192q^2) + \\ + \eta(20R^2\tau^2 + 82R\tau W + 96Wq + 384q^2)].$$

Свободную поверхность $f(x) = 1 + \eta(x)$ выберем так, чтобы удовлетворить оставшемуся граничному условию (3.4).

Продифференцируем это условие по x вдоль свободной поверхности

$$p_x + p_y \eta' + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x^2 \partial y} - 2\tau \eta'' = 0 \quad \text{при } y = f(x) \quad (3.9)$$

Из уравнений движения

$$p_x = -F^{-1} \cos \alpha + 6R^{-1} (a_0 + a_1) - R^{-1} \partial^2 \psi_0 / \partial x^2 \partial y + O(\varepsilon^3) \\ p_y = -F^{-1} \sin \alpha + O(\varepsilon^2)$$

Значение p_y достаточно взять с точностью до $O(\varepsilon^2)$, так как этот член еще умножается на η' . Для $\eta(x)$ получим тогда обыкновенное уравнение второго порядка

$$\eta'' + n\eta + A\eta^2 = C\eta' + D\eta' + \delta \quad (3.10)$$

$$n = 12(R\tau - 4W + 6)(-7R\tau - 6 + 6W)^{-1}$$

$$A = 6(R\tau + 6W - 12)(-7R\tau - 6 + 6W)^{-1}$$

$$C = 1/140 R(-19R^2\tau^2 - 618R\tau W + 30R\tau - 2304W^2 + 5092W - 2592) \times \\ \times (7R\tau + 6 - 6W)^{-1}$$

$$D = 1/140 R(560RF^{-1} \sin \alpha + 19R^2\tau^2 + 38R\tau W + 30R\tau - 672W^2 + 1632W - 864) \times \\ \times (-7R\tau - 6 + 6W)^{-1}$$

$$\delta = 2(-2RF^{-1} \cos \alpha + 3R\tau - 6)(7R\tau + 6 - 6W)^{-1}$$

При записи коэффициентов использовано соотношение $q = 1 - W$, которое получается из равенства единице расхода в неподвижной системе координат (при выборе характерной глубины как средней).

Уравнение (3.10) имеет тривиальное решение $\eta = \delta = 0$, соответствующее пуазейлевскому потоку.

Равенство $\delta = 0$ равносильно требованию равенства единице расхода в неподвижной системе координат для пуазейлевского потока

$$1/2 R(\tau - 2/3 F^{-1} \cos \alpha) = 1$$

В случае определения характерной глубины как средней, интегрируя (3.10) по длине волны, получим

$$\delta = \frac{A}{\lambda} \int_0^\lambda \eta^2 dx \quad (3.11)$$

Отсюда легко видеть, что δ порядка $O(\eta^2)$.

Для малых амплитуд можно получить периодические решения (3.10) методом Боголюбова — Крылова [3], положив

$$\zeta = \varepsilon M_0 \cos \varphi + \varepsilon^2 u_1(M_0, \varphi) + \varepsilon^3 u_2(M_0, \varphi) + \dots$$

$$d\varphi/dx = \sqrt{n} + \varepsilon B_1(M_0) + \varepsilon^2 B_2(M_0) + \dots \quad (3.12)$$

$$dM_0/dx = \varepsilon A_1(M_0) + \varepsilon^2 A_2(M_0) + \dots \quad (3.13)$$

Опуская выкладки, приводим результаты

$$\zeta = M_0 \cos \varphi + \left(-\frac{CM_0^2}{3\sqrt{n}} + \frac{19ACM_0^3}{288n\sqrt{n}} \right) \sin \varphi + \left(\frac{AM_0^2}{6n} + \frac{C^2M_0^3}{9n} \right) \cos 2\varphi +$$

$$+ \left(\frac{CM_0^2}{6\sqrt{n}} - \frac{ACM_0^3}{9n\sqrt{n}} \right) \sin 2\varphi + \left(\frac{A^2M_0^3}{48n^2} - \frac{C^2M_0^3}{32n} \right) \cos 3\varphi + \frac{5ACM_0^3}{96n\sqrt{n}} \sin 3\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{n} + \frac{A^2M_0^2}{12n\sqrt{n}} - \frac{C^2M_0^2}{24\sqrt{n}}, \quad \frac{dM_0}{dx} = -\frac{ACM_0^3}{8n} + \left(\frac{C\delta}{2n} + \frac{D}{2} \right) M_0 \quad (3.14)$$

Для нахождения стационарного режима рассмотрим случай $M_0' = 0$. Из (3.14) имеем

$$M_0^2 = 4\delta/A + 4Dn/AC \quad (3.15)$$

Кроме того, из (3.11) видно, что

$$\delta = 1/2 AM_0^2$$

тогда

$$M_0^2 = -4Dn/AC \quad (3.16)$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varphi'} = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{A^2M_0^2}{12n^2} \right) \quad (3.17)$$

Из этого соотношения, учитывая значения n и A , нетрудно получить, что скорость распространения волны с точностью до $O(\lambda^{-3})$

$$W = 3 - 1/2 R\tau + \pi^2/12 \lambda^2 (13R\tau - 12) \quad (3.18)$$

Квадрат амплитуды с точностью до $O(\lambda^{-3})$ из (3.16) получается равным

$$M_0^2 = \frac{8\pi^2(560RF^{-1}\sin\alpha + 691R^2\tau^2 - 2544R\tau - 3744)}{3\lambda^2(5R\tau - 6)(-2941R^2\tau^2 + 10616R\tau - 8052)} \quad (3.19)$$

Из (3.15) и (3.16) следует, что $\delta = -2Dn/C$, это соотношение однозначно определяет касательное напряжение τ (которое входит в выражения амплитуды и скорости распространения волны) через остальные параметры потока R , F , α и W .

Амплитуда основной гармоники полученного установившегося периодического течения и длина его волны в зависимости от скорости распространения определяются выражениями (3.16) и (3.17). Связь амплитуды и длины волны определяется соотношением (3.19).

Для жидкости заданной вязкости (параметр R), стекающей под заданным углом наклона α и при заданной силе тяжести (параметр F), существует однопараметрическое семейство установившихся течений. Причем расход жидкости и средняя глубина этих течений будут одинаковыми, а касательное напряжение, как и все остальные характеристики потока, будет функцией одного параметра (например W).

С равным правом можно выбирать одинаковыми касательное напряжение и среднюю глубину, тогда расход будет функцией одного параметра, т. е. будет зависеть только от формы течения (при одинаковых R , F , α).

Поступило 20 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л ю б у т с к а я Л. В. Устойчивость плоско-параллельного потока вязкой жидкости под действием постоянного касательного напряжения и наклонной силы тяжести. ЖВММФ, 1961, № 6, т. I, стр. 1139—1143.
2. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. «Некоторые вопросы математики и механики». Новосибирск, 1961.
3. И в а н и л о в Ю. П. Катящиеся волны в наклонном канале. ЖВММФ, 1961, № 6, т. I, стр. 1061—1076.