

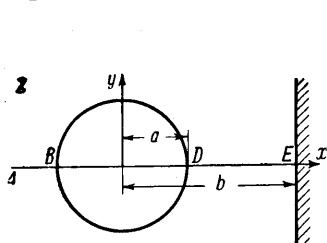
ДВИЖЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ

В. Ю. МАЗУР

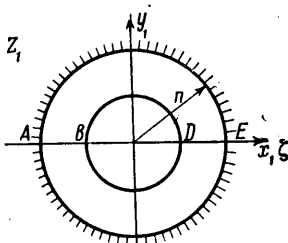
(Одесса)

Рассматривается произвольное движение кругового цилиндра в идеальной жидкости вблизи вертикальной стенки. Эта задача обычно решается в приближенной постановке с трудно оценимой степенью погрешности, возрастающей по мере приближения цилиндра к стенке [1, 2]. Точное решение проводилось ранее лишь для случая чисто циркуляционного обтекания цилиндра [3].

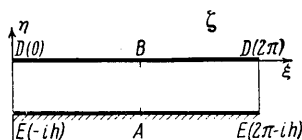
§ 1. Рассмотрим цилиндр радиуса a , движущийся в идеальной жидкости, которая покоится на бесконечности. Пусть движение цилиндра характеризуется составляющими скорости U и V . Возьмем начало коор-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

динат в центре цилиндра (фиг. 1), тогда комплексный потенциал абсолютного течения представляется выражением

$$W = -\frac{a^2}{z}(U + iV) + F(z) \tag{1.1}$$

Здесь $F(z) = Uf_1(z) + Vf_2(z)$ — аналитическая функция вне круга в полуплоскости, ограниченной стенкой. Функция F удовлетворяет условиям:

на окружности круга $\text{Im } F = 0$ (1.2)

на стенке $\text{Im } f_1(z) = \text{Im } \frac{a^2}{z}, \quad \text{Im } f_2(z) = \text{Re } \frac{a^2}{z}$ (1.3)

на бесконечности $\frac{dF}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad F \Big|_{b \rightarrow \infty} = 0$ (1.4)

Здесь b — расстояние от центра круга до стенки, изменяющееся во времени (фиг. 1).

Отобразим рассматриваемую область на кольцо (фиг. 2). Функция, реализующая это отображение, имеет вид

$$z_1 = \frac{a - nz}{z - na}, \quad n = \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

При этом круг радиуса a переходит в единичный круг, а стенка — в круг радиуса n .

Далее преобразованием $\zeta = -i \ln z_1$ разворачиваем кольцо в отрезок полосы (фиг. 3) шириной $h = \ln n$, ограниченной прямыми $\xi = 0$ и $\xi = 2\pi$. В плоскости ζ условие (1.2) принимает вид

$$\operatorname{Im} F(\zeta) = 0 \quad (1.5)$$

а условия (1.3) записываются так:

$$\operatorname{Im} f_1(\zeta)|_{\eta=-h} = -a \operatorname{sh} h \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} 2h + \cos \xi} \quad (1.6)$$

$$\operatorname{Im} f_2(\zeta)|_{\eta=-h} = a \operatorname{ch} h \frac{1 + \cos \xi}{\operatorname{ch} 2h + \cos \xi} \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что $F(\zeta)$ имеет период 2π , что позволяет аналитически продолжить ее на бесконечную полосу. Кроме того, условие (1.5) дополнительно позволяет функцию F продолжить и в часть верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta \leq h$.

При этом определение комплексного потенциала W сводится к отысканию функции F , голоморфной по всей полосе $-h \leq \operatorname{Im} \zeta \leq h$.

§ 2. По условиям аналитического продолжения имеем

$$v_1(-) = -v_1(+), \quad u_1(-) = u_1(+)$$

Здесь $v_1(-)$, $v_1(+)$ и $u_1(-)$, $u_1(+)$ — соответственно значения мнимой и реальной частей $f_1(\zeta)$ на нижней и верхней границах области. Тогда интеграл Шварца для полосы принимает вид [4]

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} u \operatorname{sch} \frac{\pi(\xi - \zeta)}{2h} d\xi \quad (2.1)$$

или

$$if_1(\zeta) = \frac{1}{2h} \operatorname{sh} \frac{\pi \zeta}{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sch} \frac{\pi \xi}{2h} \operatorname{sch} \frac{\pi(\xi - \zeta)}{2h} v(-) d\xi$$

Здесь $v(-)$ определяется (1.6). Интеграл в (2.2) через элементарные функции не выражается, ввиду чего искомую функцию $f_1(\zeta)$ выразим в виде ряда.

Из (1.6) видно, что $v(-)$ — нечетная тригонометрическая функция относительно ξ . Тогда u представляет собой четную функцию, которая может быть представлена рядом Фурье вида

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\xi \quad (2.3)$$

Имея в виду (2.1), после интегрирования получаем

$$f_1(\zeta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\cos k\xi}{\operatorname{ch} kh}$$

Отсюда

$$v(-) = \operatorname{Im} f_1(\zeta)|_{\eta=-h} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{th} kh \sin k\xi \quad (2.4)$$

С другой стороны, разлагая (1.6) в ряд Фурье, имеем

$$v(-) = 2a \operatorname{sh} h \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2kh} \sin k\xi \quad (2.5)$$

Из сопоставления (2.4) и (2.5) получаем

$$A_k = 2a \operatorname{sh} h \frac{(-1)^k e^{-2kh}}{\operatorname{th} kh}$$

Следовательно,

$$f_1(\zeta) = \frac{A_0}{2} + 2a \operatorname{sh} h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \cos k\zeta \quad (2.6)$$

Аналогично имеем

$$f_2(\zeta) = \frac{A_0'}{2} + 2a \operatorname{sh} h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \sin k\zeta \quad (2.7)$$

Тогда окончательно комплексный потенциал W с точностью до постоянной представляется так:

$$W_1 = -\frac{a^2}{z} U + 2aU \operatorname{sh} h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \cos k\zeta \quad (2.8)$$

$$W = W_1 + W_2,$$

$$W_2 = -\frac{a^2}{z} iV + 2aV \operatorname{sh} h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \sin k\zeta \quad (2.9)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 соответствует движению по направлению к стенке, 2 — вдоль стенки.

$$\zeta = -i \ln \frac{a - nz}{z - na} \quad (2.10)$$

Ряды в (2.8) и (2.9) сходятся при $h > 0$, т. е. при любом $b > a$. Потенциал чисто циркуляционного обтекания цилиндра представляется в виде

$$W_3 = \frac{\Gamma}{2\pi} \zeta \quad (2.11)$$

При достаточном удалении цилиндра от стенки ($b = \infty$) комплексный потенциал $W = W_1 + W_2 + W_3$ принимает вид

$$W|_{b \rightarrow \infty} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z}{a} - \frac{a^2}{z} (U + iV) \quad (2.12)$$

т. е. представляет собой потенциал движения цилиндра в неограниченной жидкости.

§ 3. Пользуясь формулами (2.8) и (2.9), определяем скорости:

1. На стенке $v_{1x} = v_{2x} = 0$

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{2ai \operatorname{sh} h}{b^2 - a^2 + y^2} \quad (3.1)$$

$$v_{1y} = \frac{2a^2by}{(b^2 + y^2)^2} U - \frac{4a^2 \operatorname{sh}^2 h}{b^2 - a^2 + y^2} U \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^k e^{-2kh} \operatorname{cth} kh \sin k\zeta \quad (3.2)$$

$$v_{2y} = -\frac{a^2(b^2 - y^2)}{(b^2 + y^2)^2} V + \frac{4a^2 \operatorname{sh}^2 h}{b^2 - a^2 + y^2} V \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^k e^{-2kh} \operatorname{cth} kh \cos k\zeta \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{2ay \operatorname{sh} h}{b^2 - a^2 - y^2} \quad (3.4)$$

2. На окружности круга радиуса a в полярных координатах

$$\frac{d\xi}{dz} = -\frac{\operatorname{sh} h \sin \theta + i \cos \theta}{a \operatorname{ch} h - \cos \theta} \quad (3.5)$$

$$v_{r1} = U \cos \theta, \quad v_{\theta 1} = U \sin \theta - \frac{2U \operatorname{sh}^2 h}{\operatorname{ch} h - \cos \theta} \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^k \frac{e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \sin k\xi \quad (3.6)$$

$$v_{r2} = V \sin \theta, \quad v_{\theta 2} = -V \cos \theta + \frac{2V \operatorname{sh}^2 h}{\operatorname{ch} h - \cos \theta} \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^k \frac{e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \cos k\xi \quad (3.7)$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\sin \theta \operatorname{sh} h}{\cos \theta \operatorname{ch} h - 1} \quad (3.8)$$

§ 4. Кинетическая энергия, заключенная в слое жидкости единичной высоты при движении цилиндра вблизи стенки, может быть определена выражением

$$T = -\frac{1}{2} \rho a \int_0^{2\pi} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\theta \quad (\varphi = \operatorname{Re} W) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = U \cos \theta + V \sin \theta \right) \quad (4.1)$$

Здесь W — потенциал на контуре круга, определяемый (2.8) и (2.9). Имея в виду (3.8), после интегрирования окончательно получаем

$$T = \frac{1}{2} \rho \mu a^2 (U^2 + V^2), \quad \mu = 1 + 4 \operatorname{sh}^2 h \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-3kh}}{\operatorname{sh} kh} \quad (4.2)$$

При интегрировании (4.1) использованы соотношения

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \frac{\cos k\xi (1 + \cos \xi \operatorname{ch} h)}{(\operatorname{ch} h + \cos \xi)^2} d\xi = \\ & = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \frac{\sin k\xi \sin \xi \operatorname{sh} h}{(\operatorname{ch} h + \cos \xi)^2} d\xi = -2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-3kh}}{\operatorname{sh} kh} \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \frac{\cos k\xi \sin \xi \operatorname{sh} h}{(\operatorname{ch} h + \cos \xi)^2} d\xi = \\ & = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-2kh}}{\operatorname{sh} kh} \frac{\sin k\xi (1 + \cos \xi \operatorname{ch} h)}{(\cos \xi + \operatorname{ch} h)^2} d\xi = 0 \end{aligned}$$

Применение теоремы об изменении кинетической энергии для жидкой среды приводит к равенству

$$\frac{1}{2} \rho a^2 \frac{d\mu}{dt} (U^2 + V^2) + \rho a^2 \mu \left(U \frac{dU}{dt} + V \frac{dV}{dt} \right) = -XU - YV \quad (4.4)$$

Дополнительное уравнение получаем, используя закон количества движения

$$\rho a^2 \frac{d}{dt} (\mu V) = \rho a^2 \left(V \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{dV}{dt} \right) = -Y \quad (4.5)$$

Здесь X, Y — проекции главного вектора сил гидродинамических авлений на цилиндр.

Далее, при $U > 0$ имеем

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{d\mu}{dh} \frac{U}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad \left(\frac{d\mu}{dh} < 0 \right) \quad (4.6)$$

Здесь μ определяется согласно (4.2). Окончательно получаем

$$X = \rho\pi a^2 \left(\frac{U^2 - V^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \frac{d\mu}{dh} - \mu \frac{dU}{dt} \right) \quad (4.7)$$

$$Y = \rho\pi a^2 \left(\frac{UV}{\sqrt{b^2 - a^2}} \frac{d\mu}{dh} - \mu \frac{dV}{dt} \right)$$

Формулы (4.7) определяют гидродинамические силы, действующие на цилиндр при его произвольном движении вблизи стенки. Для случая равномерного движения имеем

$$X = -\frac{\rho\pi a^2 v^2 \cos 2\alpha}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \frac{d\mu}{dh}, \quad Y = \frac{\rho\pi a^2 v^2 \sin 2\alpha}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \frac{d\mu}{dh} \quad (4.8)$$

Здесь v — скорость движения цилиндра, α — угол между направлением скорости и стенкой.

Из (4.8) следует, что при $\alpha > 1/4\pi$ составляющая X отталкивает цилиндр от стенки, при $\alpha < 1/4\pi$ — действует в обратном направлении.

В заключение определим силу X_3 , действующую на цилиндр при чисто циркуляционном обтекании последнего. Имеем

$$X_3 = -a \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta = \frac{\rho \cdot a}{2} \int_0^{2\pi} v^2 \cos \theta d\theta$$

Далее, имея в виду (2.11) и (3.5), после интегрирования получаем

$$X_3 = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a \operatorname{sh} h} = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi \sqrt{b^2 - a^2}} \quad (4.9)$$

что полностью соответствует [3].

Поступило 20 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабанеев В. С. О движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Вест. Ленинград. ун-та, 1958, № 13, вып. 3.
2. Блох Э. Д., Гиневский Л. С. О движении системы тел в идеальной жидкости. НТО судостроит. промышленности им. Крылова, 1963, вып. 47.
3. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. Изд. «Мир», М., 1964.
4. Лаврентьев М. А., Бабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1954.