

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ

(Калинин)

Уравнения одномерного и плоского установившегося адиабатического движения идеального газа преобразуются к новой форме, в которой роль независимых переменных играют функция тока τ и функция ξ , введенная Мартином [1, 2]. Доказано, что функция ξ сохраняет постоянное значение на сильной ударной волне (и на сильном скачке уплотнения для плоских течений). Для одномерных изэнтропических движений полученное преобразование позволяет получать новые точные решения, исходя из известных точных решений уравнений движения. Показано также, что одномерные движения идеального газа с уравнением состояния $p = \rho f(t)$ и одномерные адиабатические движения газа, для которого $p = \rho f(\tau)$, эквивалентны (t — время, τ — функция тока). Показано, что если $k = s = -1$, m и n произвольны ($m \neq n \neq 0$) и $\nu = 1$, общее решение основной в теории одномерных адиабатических автомодельных движений системы [3] находится в параметрическом виде при помощи квадратур. Изучены плоские адиабатические движения идеального газа, обладающие тем свойством, что давление зависит лишь от одной геометрической координаты.

1. Уравнения одномерного адиабатического движения идеального (т. е. лишенного вязкости и теплопроводности) газа запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad S(p, \rho) = F(\tau) \quad (1.1)$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность, p — давление газа, x — геометрическая координата, t — время, $S = S(p, \rho)$ — энтропия газа, $F(\tau)$ — произвольная функция τ , где $\tau = \tau(x, t)$ — функция тока.

Уравнения (1.1) позволяют ввести две функции τ и ξ такие, что

$$d\tau = \rho dx - \rho u dt, \quad d\xi = \rho u dx - (p + \rho u^2) dt \quad (1.2)$$

Функция ξ была впервые использована Мартином [1]. Принимая τ и ξ за новые независимые переменные, нетрудно (1.1) преобразовать к форме

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{\partial(RU)}{\partial \xi} = 0, \quad S\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{P}\right) = F(\tau) \quad (1.3)$$

Связь между новыми и старыми переменными имеет вид

$$p = R^{-1}(\tau, \xi), \quad \rho = P^{-1}(\tau, \xi), \quad u = U(\tau, \xi) \quad (1.4)$$

$$dx = (P + RU^2) d\tau - RU d\xi, \quad dt = RU d\tau - R d\xi$$

Сравнение (1.1) и (1.3) приводит к следующему выводу: каждому неустановившемуся адиабатическому движению идеального газа (1.1) соответствует некоторое одномерное движение газа, уравнение состояния которого определяется последним из соотношений (1.3). Таким образом, различные течения (различных газов) являются эквивалентными, с точки зрения рассматриваемого преобразования. Это позволяет строить новые течения газов, исходя из известных точных решений. В случае, когда течение является изэнтропическим, т. е. $F(\tau) = \text{const}$ и $S = f(p\rho^{-\gamma})$,

полученный результат можно сформулировать следующим образом: пусть $u = U(x, t, \gamma)$, $p = P(x, t, \gamma)$, $\rho = R(x, t, \gamma)$, $p = C\rho^\gamma$ ($C = \text{const}$) (1.5)

— какое-либо точное решение исходной системы (1.1), определяющее изоэнтропическое течение идеального газа в некоторой области ω плоскости (x, t) . Тогда, заменяя в (1.5) формально $x \rightarrow \xi$, $t \rightarrow \tau$, $\gamma \rightarrow \gamma^{-1}$, получим в параметрическом виде при помощи (1.4) новое точное решение исходных уравнений. Для сохранения размерности газодинамических величин следует соответствующим образом измерить размерности постоянных, от которых зависит исходное решение. Следует иметь также в виду, что якобиан преобразования, равный $\rho\rho$, не должен обращаться в нуль в области ω .

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Изоэнтропические течения, обладающие тем свойством, что давление зависит лишь от времени, и течения (изоэнтропические), в которых скорость газа зависит лишь от времени, являются эквивалентными, с точки зрения преобразования (1.4), как это нетрудно доказать.

2. В работе Л. И. Седова [4] было найдено точное решение (1.1) для совершенного газа, зависящее от одной произвольной функции и ряда констант, которое включает решения, соответствующие изоэнтропическому течению. Эти решения возьмем в форме, данной А. А. Никольским [5], полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Будем иметь

$$dt = t_0 \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^{2\varepsilon}}}, \quad u = U = (1 - \varepsilon) \frac{x_0}{t_0} r \sqrt{1 + \sigma^{-2\varepsilon}}$$

$$\rho = R = \rho_0 \left[\frac{\varepsilon^2 x_0^2 \rho_0}{\gamma \rho_0 t_0^2} (1 + r^2) \sigma^{-2\varepsilon} \right]^{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}} \quad (1.6)$$

$$p = P = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma, \quad r = \frac{x}{x_0} \sigma^{\varepsilon-1}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

Заменим здесь $x \rightarrow \xi$, $t \rightarrow \tau$, $\gamma \rightarrow \gamma^{-1}$, $t_0 \rightarrow \tau_0$, $x_0 \rightarrow \xi_0$ и изменим размерность произвольных постоянных p_0 , ρ_0 , заменяя $p_0 \rightarrow \rho_0^{-1}$, $\rho_0 \rightarrow p_0^{-1}$. Тогда, поскольку $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, получим из (1.4) и (1.6)

$$d\tau = \tau_0 \frac{\sigma^\varepsilon d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^{2\varepsilon}}}, \quad u = U = (1 + \varepsilon) \frac{\xi_0}{\tau_0} r^* \sqrt{1 + \sigma^{2\varepsilon}}$$

$$r^* = \frac{\xi}{\xi_0} \sigma^{-1-\varepsilon}, \quad \rho = \frac{1}{P} = \frac{\tau_0}{a\varepsilon} (1 + r^{*2})^{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}} \sigma^{1-\varepsilon}$$

$$p = \frac{1}{R} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma, \quad a = \frac{\tau_0}{\varepsilon \rho_0} \left(\frac{\gamma \varepsilon^2 \xi_0^2 \rho_0}{\rho_0 \tau_0^2} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}} \quad (1.7)$$

$$x = a \sqrt{1 + \sigma^{2\varepsilon}} (1 + r^{*2})^{\frac{(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}} - a \sqrt{1 + \sigma_0^{2\varepsilon}}$$

$$t = -\frac{\xi_0}{p_0} \left(\frac{a\varepsilon \rho_0}{\tau_0} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \int_0^z (1 + s^2)^{-\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} ds, \quad z = \frac{\xi}{\xi_0} \sigma^{-1-\varepsilon}$$

Формулы (1.7) дают в параметрическом виде точное решение (1.1). При этом линиями, вдоль которых $dt = 0$, будут кривые $\xi = C\sigma^{1+\varepsilon}$, поэтому принимаем, что $C = 0$ соответствует $t = 0$. Кроме того, принимаем, что $\sigma_0 \leq \sigma < \infty$, где $\sigma_0 = \text{const} > 0$, и соответствие между x и σ при $\xi = 0$ таково, что $x(\sigma_0) = 0$ и $0 \leq x < \infty$.

Из (1.7) следует, что в начальный момент $t = 0$ в области $0 \leq x < \infty$ распределение газодинамических величин имеет вид

$$u \equiv 0, \quad \rho = \frac{\tau_0}{a\varepsilon} \left[\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \sigma_0^{2\varepsilon}} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}}$$

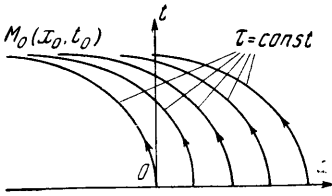
При $t > 0$ частицы газа движутся в отрицательном направлении оси x и одновременно приходят в точку (x_0, t_0) , где x_0 и t_0 определяются из (1.7) при $\xi \rightarrow -\infty$

$$x_0 = -a \sqrt{1 + \sigma_0^{2\varepsilon}}, \quad t_0 = \frac{\xi_0}{p_0} \left(\frac{a\varepsilon\rho_0}{\tau_0} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \int_0^{\infty} (1+s^2)^{\frac{\varepsilon}{2\varepsilon}} ds$$

Картина линий тока изображена на фиг. 1. В точке (x_0, t_0) скорость, плотность и давление обращаются в бесконечность (поскольку начальные данные распределены в области $x \geq 0$, то считаем, что в сечении $x = 0$ при $t = 0$ находится поршень, закон движения которого определяется последними соотношениями (1.7) при значениях $\sigma = \sigma_0$, $\xi \leq 0$).

3. В высокотемпературных потоках в ряде случаев с достаточной точностью можно считать, что температура газа зависит лишь от времени [6, 7], т. е. уравнение состояния совершенного газа имеет вид

$$P = Rf(t) \quad (1.8)$$



Фиг. 1

где P — давление, R — плотность и $f(t)$ — произвольная функция времени, определяемая из условий задачи. Уравнения движения такого газа получаются из (1.3) при $\gamma = 1$ (γ — показатель адиабаты), если принять, что τ — время, а ξ — геометрическая координата. Тогда рассмотренное выше преобразование позволяет сделать следующий вывод: каждому движению идеального газа с уравнением состояния (1.8) соответствует некоторое

адиабатическое движение идеального совершенного газа для которого $\gamma = 1$, и наоборот.

Рассмотрим одномерное адиабатическое движение газа в области между поршнем и сильной ударной волной, возникающей вследствие движения поршня по какому-либо закону и движущейся по покоящемуся газу. Если $U = U_0(t)$ — скорость ударной волны, $\rho = \rho_0(x)$ — плотность покоящегося перед ней газа, то условия сохранения массы и импульса дают нам

$$\rho_0 U_0 = \rho (U_0 - u), \quad p = \rho_0 u U_0, \quad dx = U_0 dt, \quad p_0 \equiv 0 \quad (1.9)$$

Используя эти соотношения, нетрудно показать, что функция ξ , определяемая из (1.2), будет постоянной на сильной ударной волне. Таким образом, уравнения движения газа в форме (1.3) будут более удобными при изучении течений между поршнем l и сильной ударной волной L , поскольку образом поршня является линия $\tau = 0$, $\xi \leq 0$, а образом L — линия $\xi = 0$, $\tau \geq 0$. Этот результат остается справедливым в случае, когда движение идеального газа в области между l и L не будет адиабатическим, если справедливы условия (1.9).

Перепишем (1.3) в следующем виде (для совершенного газа):

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} - f(\tau) \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad V = R \frac{1-\gamma}{\gamma} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\gamma-1}{\gamma} V \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad P = (\gamma-1) f(\tau) V^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Здесь $f(\tau)$ — произвольная функция. Эта система вместе с (1.4) эквивалентна (1.1) в области, где $p \neq 0$. Будем искать решение (1.10) в форме

$$U = \varphi(\tau) (\xi + h), \quad V = \psi(\tau) (\xi + h)^2 \quad (1.11)$$

где h — произвольная постоянная. Тогда из (1.10) сразу получим

$$\varphi(\tau) = -\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\psi'}{\psi}, \quad f(\tau) = \frac{\varphi' + \varphi^2}{2\psi}$$

Функцию $\psi(\tau)$, через которую выражаются f и φ , можно считать произвольной функцией τ . Решение (1.11) можно использовать для построения течений [8-10], содержащих ударные волны конечной амплитуды.

Рассмотрим некоторые одномерные адиабатические автомодельные движения идеального газа.

Предположим, что среди определяющих параметров задачи имеются лишь две постоянные a и b с независимыми размерностями, причем будем считать, что

$$[a] = ML^{-1}T^{-1}, \quad [b] = L^m T^n, \quad m \neq n \neq 0$$

Независимые переменные τ и ξ имеют следующие размерности:

$$[\tau] = ML^{-2}, \quad [\xi] = ML^{-1}T^{-1}$$

Единственным безразмерным параметром является величина $\lambda = \xi a^{-1}$, и функции, входящие в (1.10), могут быть представлены в виде

$$U = \frac{a}{\tau} u(\lambda), \quad V = a^\alpha b^\beta \tau^{\delta_1} v(\lambda), \quad f(\tau) = C_1 a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \tau^{\delta_1}, \quad \lambda = \xi a^{-1} \quad (1.12)$$

Здесь $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ — функции, подлежащие определению, C_1 — произвольная безразмерная постоянная, а константы α , β , ..., δ_1 определяются из соотношений

$$\alpha = \frac{(\gamma-1)(2m+n)}{\gamma(m+n)}, \quad \beta = -\frac{\gamma-1}{\gamma(m+n)}, \quad \delta = -\frac{(\gamma-1)m}{\gamma(m+n)}$$

$$\alpha_1 = 2 - \alpha, \quad \beta_1 = -\beta, \quad \delta_1 = -2 - \delta$$

Подстановка (1.12) приводит к следующим уравнениям:

$$u \frac{du}{dv} = \gamma \frac{\delta C_1 v - u^2}{\gamma \delta v - \gamma + 1}, \quad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{(\gamma-1)C_1 - \gamma u^2}{u(\gamma \delta v - \gamma + 1)}$$

Решая эту систему, получим

$$u^2 = \delta C_1 \frac{2\gamma v + \gamma - 1}{\gamma(\delta + 2)} + \frac{C_2}{(\gamma \delta v - \gamma + 1)^{2/\delta}}, \quad \lambda = \int \frac{(\gamma-1)C_1 - \gamma u^2}{u(\gamma \delta v - \gamma + 1)} dv \quad (1.13)$$

Таким образом, имеем следующий результат: если $k = s = -1$, m и n произвольны, причем $m + n \neq 0$ и $v = 1$, то общее решение основной в теории одномерных адиабатических автомодельных движений системы [3] находится в параметрическом виде при помощи квадратур.

Если p_0 , ρ_0 , u_0 — параметры газа перед ударной волной, то нетрудно доказать, что на ударной волне имеет место равенство

$$d\xi = -\frac{p_0 + \rho_0 u_0^2 - \rho_0 u_0 U_0}{\rho_0 (U_0 - u_0)} d\tau$$

2. Уравнения плоского установившегося адиабатического течения идеального газа позволяют ввести две новые функции ξ и η такие, что

$$d\xi = \rho u v dy - (p + \rho v^2) dx, \quad d\eta = \rho u dy - \rho v dx \quad (2.1)$$

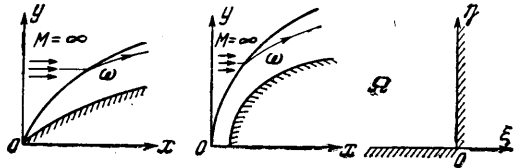
Функция η является функцией тока. Функция ξ была использована впервые Мартином [2]. Примем ξ и η за новые независимые переменные и преобразуем уравнения движения к виду

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{v}{u} + v \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{v}{u} + p \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\rho u} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{p} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{v}{p} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = f_0^\gamma(\eta)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} = i_0(\eta)$$



Фиг. 2

Здесь f_0 и i_0 — произвольные функции своего аргумента; якобиан преобразования равен $-\rho u$.

Рассмотрим задачу об обтекании идеальным газом плоского тела при наличии скачка уплотнения. Предполагая, что перед скачком давление газа $p_0 = 0$, плотность $\rho = \rho_0$ и скорость параллельна оси x и равна U_0 , запишем условия сохранения массы и импульса в форме

$$\rho (u \sin \alpha - v \cos \alpha) = \rho_0 U_0 \sin \alpha, \quad dy = \operatorname{tg} \alpha dx \quad (2.3)$$

$$U_0 \cos \alpha = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad p + \rho (u \sin \alpha - v \cos \alpha)^2 = \rho_0 U_0^2 \sin^2 \alpha$$

Используя эти соотношения, нетрудно показать, что функция ξ , определяемая из (2.1), является постоянной на скачке уплотнения.

Таким образом, уравнения плоского установившегося адиабатического движения идеального газа в форме (2.2) будут более удобными при изучении течений между телом и скачком уплотнения, так как образом тела в плоскости (ξ, η) будет линия $\eta = 0$, а образом скачка уплотнения — линия $\xi = 0, \eta \geq 0$ (фиг. 2). Этот результат остается справедливым для идеального газа с любым уравнением состояния, а также в случае, когда движение за скачком уплотнения не будет адиабатическим, если справедливы условия (2.3) на скачке.

Рассмотрим течения газа, обладающие тем свойством, что давление зависит лишь от одной геометрической координаты, например от y . В этом случае составляющая u скорости газа вдоль оси x является постоянной для каждой частицы, т. е. $u = u_0(\eta)$.

Полагая

$$u = u_0(\eta), \quad v = u_0 U, \quad p = V^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad d\tau = u_0 d\eta \quad (2.4)$$

$$\rho = f_0^{-1} V^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad f_0 = (\gamma - 1) u_0^2 f(\tau), \quad i_0 = u_0^2 \left(\frac{1}{2} + F(\tau) \right)$$

найдем, решая (2.2), что введенные функции будут вполне определенными.

Нетрудно проверить, что

$$f = Aq(\tau), \quad F = B [q(\tau)]^{\frac{2}{\gamma+1}}, \quad U = q(\tau) (\xi + h) \\ q = \frac{\gamma}{(\gamma+1)(\tau + \tau_0)}, \quad V = \frac{B}{\gamma A} q^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} \left[1 - \frac{(\xi+h)^2}{2B} q^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \right] \quad (2.5)$$

Интегрируя (2.1) с учетом (2.4) и (2.5), найдем

$$x = -a \int_0^z (1-s^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} ds + x_0, \quad a = \sqrt{2B} \left(\frac{B}{\gamma A} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (2.6)$$

$$y = -\frac{1}{2} (\gamma-1) \sqrt{2B} q^{\frac{1}{\gamma+1}} a (1-z^2)^{\frac{1}{1-\gamma}} + y_0, \quad z = \frac{\xi+h}{\sqrt{2B}} q^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

Таким образом, формулы (2.4)–(2.6) дают в параметрическом виде все адиабатические течения, для которых $p = p(y)$. Величины $A, B, \tau_0, h, x_0, y_0$ являются произвольными постоянными, а $u = u_0(\eta)$ — произвольная функция своего аргумента. Число M течения равно

$$M^2 = \frac{(u^2 + v^2) \rho}{\gamma p} = \frac{1 + 2Bz^2 q^{\frac{2}{\gamma+1}}}{(\gamma-1) B (1-z^2)} q^{\frac{-2}{\gamma+1}} \quad (2.7)$$

Как видно из (2.6), при $|z| \rightarrow 1$ линии тока, вдоль которых $q = \text{const}$, уходят в бесконечность. Исследуем их поведение при $|z| \rightarrow 1$, считая в дальнейшем всюду $\gamma > 2$.

При $z \rightarrow -1$ имеем из (2.6), считая $x_0 = y_0 = 0$

$$x = \frac{1}{2} a (\gamma-1) (1-z^2)^{\frac{1}{1-\gamma}} + ab(\gamma) + \varepsilon_1(z)$$

$$b(\gamma) = \gamma \int_0^1 t^{\frac{1}{1-\gamma}} (2-t)^{\frac{-2\gamma-1}{\gamma-1}} dt - \gamma + 1, \quad \varepsilon_1(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -1 \quad (2.8)$$

Сравнение (2.6) и (2.8) приводит к выводу, что при $z \rightarrow -1$ линии тока имеют асимптоты

$$y = -\sqrt{2B} [x - ab(\gamma)] q^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.9)$$

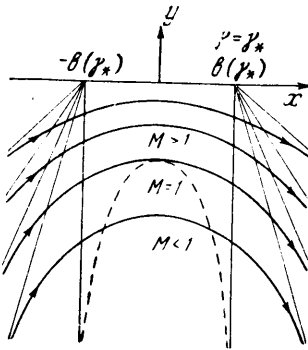
При $z \rightarrow 1$ линии тока, как нетрудно установить, также имеют асимптоты

$$y = \sqrt{2B} [x + ab(\gamma)] q^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.10)$$

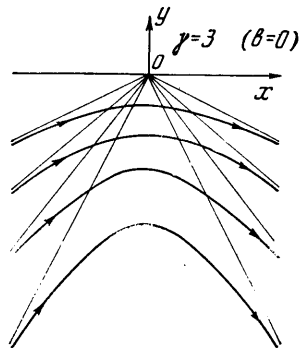
Можно доказать [11], что $b(\gamma)$, определенная выше, выражается следующим образом через гипергеометрическую функцию

$$b(\gamma) = \gamma \frac{\gamma-1}{\gamma-2} 2^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma-2}} F\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}, \frac{\gamma-2}{\gamma-1}, \frac{2\gamma-3}{\gamma-1}, \frac{1}{2}\right) - \gamma + 1 \quad (2.11)$$

Функция $b(\gamma)$ будет убывающей на интервале $2 < \gamma < \infty$, при этом $b \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow 2 + 0$, $b = 0$ при $\gamma = 3$ и $b \rightarrow -\infty$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Картина линий тока при $2 < \gamma < 3$ изображена на фиг. 3, причем для простоты принято $h = 0$ в (2.5) и $u_0(\eta) > 0$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Ось y будет осью симметрии для всех линий тока. В точках, симметричных относительно оси y , давление и плотность одинаковы. Каждое семейство асимптот линий тока представляет собой пучок прямых. Течение определено всюду в нижней полуплоскости.

При движении вдоль любой линии тока из бесконечности вверх по течению число M убывает от ∞ до значения, определяемого из (2.7) при $z = 0$ (на оси симметрии).

Это минимальное значение M_{\min} будет различным для различных линий тока. Из (2.6) и (2.7) находим M_{\min} как функцию y при $z = 0$

$$M_{\min} = -ay^{-1} \sqrt{1/2(\gamma-1)} \quad (-\infty < y < 0)$$

Если $\gamma = 3$, то $b = 0$, и асимптоты всех линий тока (при $|z| \rightarrow 1$) проходят через начало координат (фиг. 4). При $\gamma > 3$ имеем $b(\gamma) < 0$, и каждая пара асимптот, соответствующая какой-либо линии тока, имеет общую точку на оси симметрии.

Полагая $M = 1$, найдем из (2.6) и (2.7) звуковую линию рассматриваемого течения.

Нетрудно проверить, что

$$x = -a \int_0^z (1-s^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} ds, \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (2.12)$$

$$y = -a \left(\frac{\gamma-1}{2(1-\varepsilon z^2)} \right)^{1/2} (1-z^2)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Как видно из (2.12), звуковая линия имеет ось симметрии ($x=0$) и две вертикальные асимптоты

$$x = \pm l, \quad l = a \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} (1-s^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} ds$$

Функция $l(\gamma)$ монотонно возрастает на интервале $2 < \gamma < \infty$, и поэтому уравнение $l(\gamma) = b(\gamma)$ имеет единственное решение γ_* , причем $2 < \gamma_* < 3$. При $\gamma = \gamma_*$ прямые, проходящие через общие пучков асимптот перпендикулярно оси x , будут асимптотами звуковой линии. На фиг. 3 изображены линии тока, асимптоты и звуковая линия (пунктиром) для $\gamma = \gamma_*$.

Если давление p_0 газа перед скачком уплотнения не равно нулю, то в правой части последнего из равенств (2.3) появляется член p_0 . Направляя ось y параллельно вектору скорости набегающего потока и используя (2.1) и (2.3), нетрудно доказать, что на скачке имеет место равенство

$$d\xi = \frac{p_0 + \rho_0 U_0^2}{\rho_0 U_0} d\eta$$

Таким образом, если течение перед скачком уплотнения известно, то образом скачка в плоскости $|\xi, \eta|$ является известная кривая, форма которой не зависит от формы обтекаемого тела.

Поступило 29 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin M. H. The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. *Canad. J. Math.*, 1953, vol. 5. 1
2. Martin M. H. Steady rotat plane flow of a gas. *Amer. J. Math.*, 1950, vol. 72.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, 5-е изд. Изд-во «Наука», 1965.
4. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5.
5. Никольский А. А. Некоторые нестационарные гиперзвуковые аналогии. *Инж. ж.*, 1962, т. 2, № 2.
6. Рыжов О. С., Таганов Г. И. Второй предельный случай задачи о сильном взрыве. *ПММ*, 1956, т. 20, вып. 4.
7. Фаддеев С. И. Автомодельное решение задачи о плоском поршне при нулевом градиенте температуры. *Инж. ж.*, 1962; т. 2, № 2.
8. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. Построение точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики и их приложения. *ПММ*, 1958, т. 22, вып. 2.
9. Sabanes H. Sur l'integration d'une equation de Monge-Ampère. *Compt. rend. Acad. Sci.*, 1955, vol. 241, No 19.
10. Keller J. B. Spherical cylindrical and one-dimensional gas flow. *Quart. Appl. Math.*, 1956, vol. 14, No 2.
11. Уиттекер Е. М., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, 1963.