

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ, ИСКРИВЛЕННАЯ СИЛАМИ ТЯЖЕСТИ

В. С. ОМЕЛЬЧУК

(Москва)

Для свободной турбулентной струи, имеющей плотность вещества, отличную от плотности окружающей среды, характерно изменение импульса вдоль потока, вызванное действием архимедовой подъемной силы.

В настоящей работе делается попытка найти зависимости, определяющие изменение осевых скоростей и избыточных температур, для наиболее общего случая неvertикального истечения свободной неизотермической осесимметричной струи воздуха с соизмеримыми значениями инерционных и гравитационных сил.

При решении поставленной задачи используется та же схема струи, что и в работе [1], с соответствующими принципиальными допущениями.

Обозначения

s — длина траектории струи;	x, y — декартовы координаты;
s_n — тоже до переходного участка;	P_y — архимедова подъемная сила;
R — радиус струи;	γ — объемный вес воздуха;
r — расстояние от оси до текущей точки в поперечном сечении струи;	ρ — плотность воздуха;
α — угол наклона касательной к оси струи;	T — абсолютная температура воздуха;
K — импульс в поперечном сечении струи;	c_p — теплоемкость воздуха;
Q — избыточное теплосодержание в поперечном сечении струи;	u — скорость струи;
	Δt — избыточная температура струи;
	g — ускорение силы тяжести;
	c — эмпирическая константа;
	n — турбулентное число Прандтля.

Приняты следующие индексы (внизу): 0 — в плоскости истечения струи, ∞ — в окружающем струю пространстве, m — на оси струи, s — в произвольном поперечном сечении струи на расстоянии s .

1. Постановка задачи. Рассматриваемая струя находится под действием инерционных сил, имеющих направление истечения струи, и гравитационных сил, направленных вертикально. При этом количество движения вдоль оси абсцисс остается неизменным от сечения к сечению, а количество движения вдоль оси ординат изменяется, и величина его приращения равна подъемной архимедовой силе.

По теореме об изменении количества движения будем иметь

$$K_s \cos \alpha_s - K_0 \cos \alpha_0 = 0, \quad K_s \sin \alpha_s - K_0 \sin \alpha_0 = P_y \quad (1.1)$$

Третье исходное уравнение получим из условия постоянства избыточного теплосодержания струи $Q_0 = Q_s$.

Будем полагать, что струя на всем своем пути сохраняет круглое поперечное сечение. В основном участке струи поперечные профили относительных скоростей удовлетворительно выражаются зависимостью Шлихтинга

$$u / u_m = [1 - (r / R)^{1.5}]^2 \quad (1.2)$$

а профили относительных избыточных температур — формулой Тейлора

$$\Delta t / \Delta t_m = (u / u_m)^n \quad (1.3)$$

В рассматриваемом исследовании принято $n = 0.5$. Предположим, что радиус струи прямо пропорционален пройденному пути $R = cs$.

Полагая, далее, поля скоростей и избыточных температур на истечении равномерными, рассмотрим величины, входящие в исходные уравнения.

Выделив в поперечном сечении струи на расстоянии s от истечения ($s > s_n$) элементарный участок $2\pi r dr$, найдем величину импульса в этом сечении

$$K_s = 2\pi \int_0^R \rho u^2 r dr$$

Будем рассматривать такие неизотермические струи, в которых отношение плотности воздуха в текущей точке струи к плотности окружающего воздуха близко к единице.

Тогда, учитывая выражения (1.2), (1.3) и принимая во внимание, что $R = cs$, получим

$$K_s = 0.134 \pi c^2 \rho_{\infty} s^2 u_m \quad (1.4)$$

Начальный импульс струи определяется выражением

$$K_0 = \pi R_0^2 \rho_0 u_0^2 \quad (1.5)$$

Архимедова подъемная сила

$$P_y = \int_0^s \left[2\pi \int_0^R (\gamma_{\infty} - \gamma) r dr \right] ds$$

Полагая давление в струе и вне ее одинаковым, по уравнению состояния газов можем записать

$$\frac{\gamma_{\infty} - \gamma}{\gamma} = \frac{T - T_{\infty}}{T_{\infty}} = \frac{\Delta t}{T_{\infty}}$$

Примем, что $\gamma / \gamma_{\infty} \approx 1$, тогда

$$P_y = \int_0^s \left[2\pi \frac{\gamma_{\infty}}{T_{\infty}} \int_0^R \Delta t r dr \right] ds$$

Учитывая равенства (1.2), (1.3), получим,

$$P_y = 0.428 \pi c^2 \frac{\gamma_{\infty}}{T_{\infty}} \int_0^s \Delta t_m s^2 ds \quad (1.6)$$

Определим теперь теплосодержание в поперечном сечении в начале струи и на расстоянии s от плоскости истечения

$$Q_0 = \pi R_0^2 c_p \gamma_0 \Delta t_0 u_0, \quad Q_s = 2\pi c_p \int_0^R \gamma \Delta t r dr \quad (1.7)$$

Принимая, как и прежде, $\gamma / \gamma_{\infty} \approx 1$ и учитывая (1.2), (1.3), можем записать

$$Q_s = 0.18 \pi c^2 c_p \gamma_{\infty} \Delta t_m u_m s^2 \quad (1.8)$$

Из выражения (1.4) определим осевую скорость

$$u_m = \frac{1.54 \sqrt{K_s}}{c \sqrt{\rho_{\infty} s}} \quad (1.9)$$

Из условия $Q_0 = Q_s$, с учетом (1.7), (1.8) и (1.9), найдем осевую избыточную температуру

$$\Delta t_m = \frac{3.6\gamma_0 \Delta t_0 u_0 R_0^2}{c \sqrt{g\gamma_\infty} s \sqrt{K_s}} \quad (1.10)$$

Таким образом, установлены зависимости, описывающие изменения осевых скоростей и избыточных температур в искривленной струе, однако они содержат пока еще неизвестные s и K_s .

Заметим, что в частном случае вертикального истечения неизотермической струи ($\alpha_0 = 1/2\pi$, $s = y$) задача решена в работе [2]. В случае же изотермической струи или пренебрежимо малых архимедовых подъемных сил, по сравнению с динамическими ($K_s \approx K_0$), формулы (1.9) и (1.10) приобретают вид зависимостей, полученных из условия постоянства импульса вдоль струи.

2. Определение длины траектории струи s . Рассматривая совместно (1.1) и равенства

$$\cos \alpha_s = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \sin \alpha_s = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad s' = \sqrt{1+y'^2} \quad (2.1)$$

получим]

$$K_s = \sqrt{1+y'^2} K_0 \cos \alpha_0, \quad P_y = y' K_0 \cos \alpha_0 - K_0 \sin \alpha_0 \quad (2.2)$$

Приравнивая правые части (1.6) и (2.2) и подставляя вместо K_s и Δt_m их значения согласно (1.4) и (1.9), будем иметь

$$y' K_0 \cos \alpha_0 - K_0 \sin \alpha_0 = \frac{0.87\pi c R_0 \gamma_0 \Delta t_0}{\cos^{1/2} \alpha_0 T_\infty} \left(\frac{T_0}{T_\infty} \right)^{1/2} \int_0^s \frac{s ds}{(1+y'^2)^{1/4}} \quad (2.3)$$

Решим совместно (2.3) и (2.1) относительно s , затем полученный результат продифференцируем и, учитывая (1.5), а также используя введенное в работе И. А. Шепелева [3] обозначение H , придем к дифференциальному уравнению

$$s' = \frac{s}{H^2 \cos^{1/2} \alpha_0} \left(\frac{s'^2 - 1}{s'} \right)^{1/2} \quad \left(H^2 = \frac{1.15 R_0 u_0^2 T_\infty}{c g \Delta t_0} \left(\frac{T_0}{T_\infty} \right)^{1/2} \right) \quad (2.4)$$

Запишем начальные условия

$$x_0 = 0, \quad s_0 = 0, \quad y_0' = \operatorname{tg} \alpha_0, \quad s_0' = \sec \alpha_0 \quad (2.5)$$

и, воспользовавшись подстановкой $s' = p$, будем находить частное решение этого уравнения в форме Коши

$$\int_{\sec \alpha_0}^p \frac{p^{3/2} dp}{\sqrt{p^2 - 1}} = \frac{1}{H^2 \cos^{1/2} \alpha_0} \int_0^s s ds \quad (2.6)$$

Для вычисления этого интеграла, интегрируем его по частям; получим

$$\int \frac{p^{3/2} dp}{\sqrt{p^2 - 1}} = p^{1/2} \ln(p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{3}{2} \int p^{1/2} \ln(p + \sqrt{p^2 - 1}) dp$$

Разложение $\ln(p + \sqrt{p^2 - 1})$ в ряд и последующее интегрирование дает

$$\int_{\sec \alpha_0}^p \frac{p^{3/2} dp}{\sqrt{p^2 - 1}} = \frac{2}{3} p^{3/2} - \frac{1}{p^{1/2}} - \frac{3}{20 p^{3/2}} - \dots - \frac{2}{3 \cos^{1/2} \alpha_0} + \cos^{1/2} \alpha_0 + \frac{3}{20} \cos^{1/2} \alpha_0 + \dots \quad (2.7)$$

Этот ряд сходится при $p > 1$; известно, $s' = (1 + y'^2)^{1/2} > 1$; таким образом, условие сходимости ряда выполняется. В дальнейших вычислениях ограничимся первым членом этого разложения

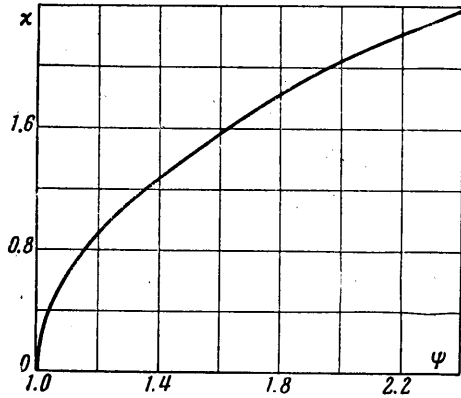
$$\frac{2}{3} p^{3/2} - \frac{2}{3 \cos^3 \alpha_0} = \frac{s^2}{2H^2 \cos^3 \alpha_0}$$

Учитывая, что $p = ds / dx$, находим

$$x = \sqrt{3}H \cos \alpha_0 \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^3 - 1}} \quad (\psi^3 = \frac{3s^2}{4H^2} + 1) \quad (2.8)$$

Эллиптический интеграл в правой части (2.8) подстановкой

$$\psi = 1 + \sqrt{3} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad (2.9)$$



Фиг. 1

приводится к интегралу первого рода в форме Лежандра

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 1/4(2 - \sqrt{3}) \sin^2 \varphi}} \quad (2.10)$$

Интеграл в правой части (2.10) можно вычислять по таблицам, однако, для него можно дать приближенное аналитическое выражение. Разложив подынтегральное выражение в ряд

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^\varphi \left(1 + \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{3k^4 \sin^4 \varphi}{8} + \frac{5k^6 \sin^6 \varphi}{16} + \dots \right) d\varphi$$

и выполняя интегрирование, а также учитывая (2.9), получим

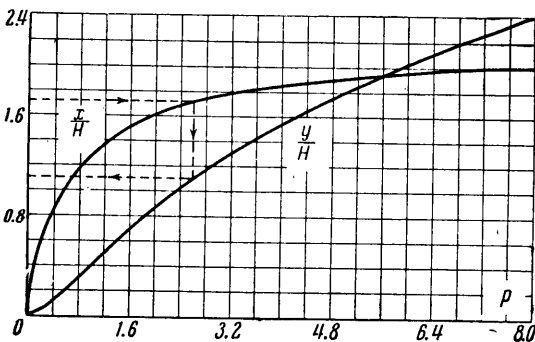
$$x = H \cos \alpha_0 \left[1.66 \arccos \frac{2.732 - \psi}{0.732 + \psi} - \frac{0.91(2.732 - \psi)(\psi - 1)^{3/2}}{(0.732 + \psi)^2} - \frac{1.5(2.732 - \psi)(\psi - 1)^{5/2}}{(0.732 + \psi)^4} - \frac{2.65(2.732 - \psi)(\psi - 1)^{7/2}}{(0.732 + \psi)^6} - \dots \right] \quad (2.11)$$

Чтобы получить зависимость $s = s(x)$, поступим следующим образом. Запишем (2.11) в виде

$$\chi = x / H \cos \alpha_0 \quad \chi = \chi(\psi) \quad (2.12)$$

построим зависимость $\chi = \chi(\psi)$ графически (фиг. 1). Теперь, задаваясь x , вычисляем $x / H \cos \alpha_0$, и по графику находим ψ . Наконец, согласно (2.8), будем иметь

$$s = 1.155H \sqrt{\psi^3 - 1} \quad (2.13)$$



Фиг. 2

3. Определение текущего импульса K_s . Из уравнения (1.4) находим

$$P_y = (K_s^2 - K_0^2 \cos^2 \alpha_0)^{1/2} - K_0 \sin \alpha_0 \quad (3.1)$$

а из (1.6) и (1.10) получаем

$$P_y = 0.87\pi^{1/2} c \frac{V \sqrt{\rho_\infty}}{T_\infty} R_0^2 \gamma_0 \Delta t_0 u_0 \int_0^s \frac{sd s}{\sqrt{K_s}} \quad (3.2)$$

Дифференцируя оба эти выражения, приравнявая их правые части, решая результат относительно K_s , а затем интегрируя, будем иметь

$$\int_{K_0}^{K_s} \frac{K_s^{3/2} dK_s}{\sqrt{K_s^2 - K_0^2 \cos^2 \alpha_0}} = 0.87\pi^{1/2} c \frac{V \sqrt{\rho_\infty}}{T_\infty} R_0^2 \gamma_0 \Delta t_0 u_0 \int_0^s s ds$$

Вводя новую переменную $K = K_s / K_0 \cos \alpha_0$, получим

$$\int_{\sec \alpha_0}^K \frac{K^{3/2} dK}{\sqrt{K^2 - 1}} = \frac{s^2}{2H^2 \cos^{3/2} \alpha_0} \quad (3.3)$$

Воспользуемся разложением (2.7)

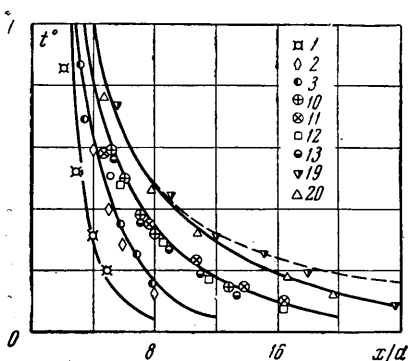
$$\int_{\sec \alpha_0}^K \frac{K^{3/2} dK}{\sqrt{K^2 - 1}} = \frac{2}{3} K^{3/2} - \frac{1}{K^{1/2}} - \frac{3}{20 K^{5/2}} - \dots - \frac{2}{3 \cos^{3/2} \alpha_0} + \cos^{1/2} \alpha_0 + \frac{3}{20} \cos^{3/2} \alpha_0 + \dots \quad (3.4)$$

Сходимость ряда очевидна, так как $K_s > K_0$, $k_s > k_0 \cos \alpha_0$ и $K > 1$. В целях упрощения ограничимся первым членом разложения

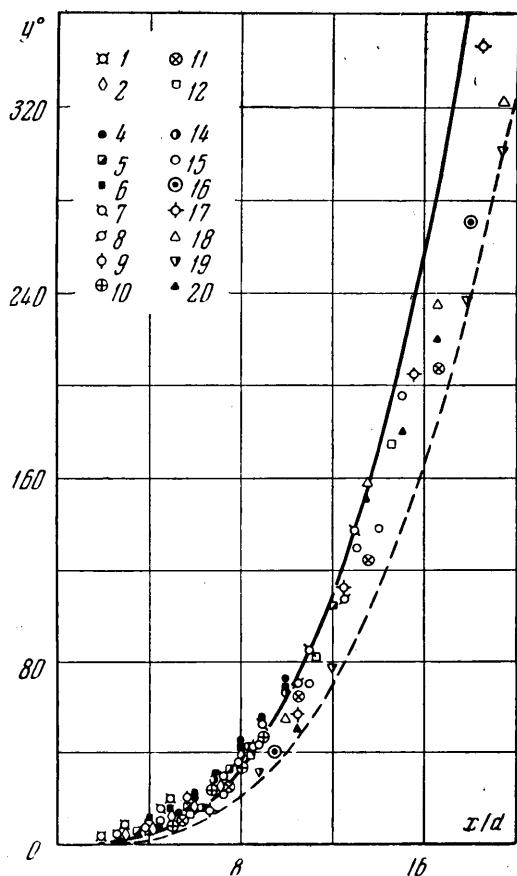
$$\frac{2}{3} \left(\frac{K_s}{K_0 \cos \alpha_0} \right)^{3/2} - \frac{2}{3 \cos^{3/2} \alpha_0} = \frac{s^2}{2H^2 \cos^{3/2} \alpha_0}$$

Отсюда

$$K_s = K_0 \left(\frac{3s^2}{4H^2} + 1 \right)^{2/3} \\ \text{или} \quad K_s = K_0 \psi^2 \quad (3.5)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

4. **Определение траектории струи.** Совместно решая уравнения (2.3) и (2.1) относительно y , находим

$$y' = \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{1}{H^2 \cos^{3/2} \alpha_0} \int_0^x \left[\int_0^x (1 + y'^2)^{1/2} dx \right] (1 + y'^2)^{1/4} dx \quad (4.1)$$

Продифференцировав это выражение дважды, приходим к уравнению

$$2y''' (1 + y'^2) - y''^2 y' = \frac{2(1 + y'^2)^{3/4}}{H^2 \cos^{3/2} \alpha_0} \quad (4.2)$$

Полагая $dy/dx = p$, затем $dp/dy = z$ и, наконец, применяя подстановку $z^2 = q$, получим

$$\frac{dq}{dp} + q \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 1)} = \frac{2(p^2 + 1)^{3/4}}{H^2 p^2 \cos^{3/2} \alpha_0} \quad (4.3)$$

Начальные условия для этого уравнения будут: $y_0 = 0$, $y_0' = p_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ при $x_0 = 0$. Из (2.1) определяем

$$y_0'' = s_0' s_0'' (s_0'^2 - 1)^{-1/2}$$

Так как $s_0'' = 0$, то $y_0'' = 0$. Отсюда при $x=0$

$$z_0 = \frac{dp}{dx} = \frac{y_0'}{p_0} = 0$$

следовательно,

$$q_0 = 0.$$

Находя частное решение уравнения (4.3) в форме Коши, будем иметь

$$z = \frac{\sqrt{2} (p^2 + 1)^{1/4}}{H \cos^{3/4} \alpha_0 p} [f(p)]^{1/2} \quad \left(f(p) = \int_{\operatorname{tg} \alpha_0}^p (p^2 + 1)^{1/4} dp \right) \quad (4.4)$$

Полученный интеграл в элементарных функциях не выражается. Из равенства $dp/dy = z$ найдем $dy = dp/z$, откуда

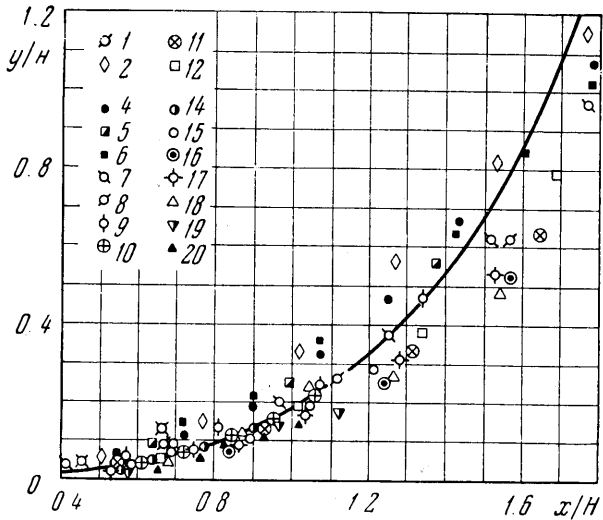
$$\frac{y}{H} = \frac{\cos^{3/4} \alpha_0}{\sqrt{2}} \int_{\operatorname{tg} \alpha_0}^p \frac{p dp}{(p^2 + 1)^{1/4} [f(p)]^{1/2}} \quad (4.5)$$

Из соотношения $dy/dx = p$ имеем $dx = dy/p$, или, с учетом (4.5)

$$\frac{x}{H} = \frac{\cos^{3/4} \alpha_0}{\sqrt{2}} \int_{\operatorname{tg} \alpha_0}^p \frac{dp}{(p^2 + 1)^{1/4} [f(p)]^{1/2}} \quad (4.6)$$

Эти выражения будем интегрировать численно; при этом каждый раз задаемся конкретным значением нижнего предела интегрирования, т. е. значением угла α_0 . В таблице приведены значения зависимостей (4.5) и (4.6) для случая горизонтального истечения ($\alpha_0 = 0$), вычисленные при помощи электронно-счетной машины БЭСМ-2М.

На фиг. 2 эти зависимости (4.5) и (4.6) представлены графически.



Фиг. 5

Уравнение траектории оси струи можно получить в более грубом приближении, воспользовавшись методом Пикара. Для этого подставим значение функции в начальной точке в уравнение (4.1) и, выполняя интегрирование, получим первый шаг приближения

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{x^3}{6H^2 \cos^3 \alpha_0} \quad (4.7)$$

Второй шаг приближения приводит к интегралам, не выражающимся в элементарных функциях.

Выражение для траектории оси струи, аналогичное (4.7), было получено Г. Н. Абрамовичем [1] — для частного случая $\alpha_0 = 0$ и И. А. Шепелевым [3] — для общего случая $\alpha_0 \neq 0$.

p	y/H	x/H	p	y/H	x/H	p	y/H	x/H
0.1	0.015	0.428	3.0	1.231	1.758	10	2.737	2.039
0.2	0.042	0.611	3.5	1.389	1.807	12	3.017	2.064
0.4	0.115	0.860	4.0	1.535	1.846	14	3.266	2.083
0.6	0.203	1.038	4.5	1.670	1.878	16	3.490	2.098
0.8	0.297	1.174	5	1.796	1.905	18	3.704	2.111
1.0	0.394	1.282	6	2.024	1.146	20	3.902	2.121
1.5	0.639	1.480	7	2.228	1.978	22	4.085	2.130
2.0	0.863	1.608	8	2.412	2.002	24	4.256	2.138
2.5	1.056	1.694	9	2.581	2.022	26	4.418	2.144

5. Сопоставление с экспериментами. Полученные зависимости (при значении эмпирической константы $c = 0.22$) сопоставлялись с экспериментальными данными Д. Н. Ляховского и С. Н. Сыркина [4].

На фиг. 3 приводятся результаты сравнений расчетного изменения максимальных относительных избыточных температур с опытным, а на фиг. 4 и 5 такие сопоставления даны для расчетных и опытных данных траекторий. При этом кривые сплошной линией получены на фиг. 3 по формуле

$$t^\circ = \frac{\Delta t_m}{\Delta t_0} = \frac{8R_0}{H} \left(\frac{T_\infty}{T_0} \right)^{1/2} \frac{1}{\psi \sqrt{\psi^2 - 1}} \quad (5.1)$$

а на фиг. 4 — из выражения

$$y^\circ = \frac{y \sqrt{T_\infty / T_0}}{Ad} = 0.064 \left(\frac{x}{d} \right)^3 \quad \left(A = \frac{gd\Delta t^\circ}{u_0^2 T_\infty} \right) \quad (5.2)$$

Здесь A — критерий Архимеда, d — диаметр сопла. Пунктиром нанесены результаты расчета по формулам И. А. Шепелева [3]. На фиг. 5 теоретическая кривая построена по данным таблицы при исключенном параметре p . На фиг. 3—5 точкам соответствуют следующие значения критерия Архимеда:

точки	1	2	3	4	5	6	7
$A =$	0.227	0.147	0.146	0.0727	0.0723	0.0719	0.0452
точки	8	9	10	11	12	13	14
$A =$	0.0447	0.0425	0.0332	0.033	0.0321	0.032	0.0202
точки	15	16	17	18	19	20	
$A =$	0.0158	0.0152	0.015	0.0092	0.0087	0.0085	

Поступило 25 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

- Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
- Шепелев И. А. Вертикальные воздушные фонтаны. Тр. Н.-и. ин-та сантехники Госстроя СССР, 1963, сб. 15.
- Шепелев И. А. Приточные вентиляционные струи и воздушные фонтаны. Изв. Акад. строит. и архитектуры СССР, 1961, № 4.
- Ляховский Д. Н., Сыркин С. Н. Аэродинамика факела, вытекающего в среду другой плотности. Ж. техн. физ., 1939, т. 9, № 9.