

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА УПРУГОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. И. КОРОТКИН

(Ленинград)

Интерес к рассматриваемой проблеме возник после опубликования результатов экспериментов Крамера [1-3]. Кроме исследований, указанных в работе [4], вопросу взаимодействия упругой поверхности с пограничным слоем посвящены статьи [5-8]. В настоящей заметке задача о взаимодействии упругой поверхности с возмущениями, возникающими в пограничном слое, ставится так же, как и в работе [4]. Приближенность методов решения задачи о гидродинамической устойчивости ламинарного пограничного слоя приводит к различию в окончательных расчетных формулах даже в том случае, если авторы используют одну и ту же схему Гейзенберга — Толлмина — Шлихтинга — Лина. Поэтому ниже приводится сравнение данных по устойчивости пограничного слоя на твердой стенке, полученных рядом авторов, с расчетами по формулам, которые затем обобщаются на случай упругой поверхности.

§ 1. Устойчивость ламинарного пограничного слоя на твердой поверхности. При использовании метода малых колебаний [9] задача сводится к нахождению общего решения уравнения Орра—Зоммерфельда

$$(u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f = i \frac{1}{\alpha R} (f^{IV} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f) \quad (1.1)$$

выписанного в безразмерном виде относительно амплитуды функции тока возмущающего движения f , при граничных условиях

$$f(0) = f'(0) = f'(1) + \alpha f(1) = 0, \quad f(y) < M < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

В уравнении (1.1) функция $u(y)$ — распределение средней скорости поперек пограничного слоя, α — волновое число, определяющее длину волны возмущающего движения, c — скорость распространения возмущающего движения, R — число Рейнольдса, построенное по толщине пограничного слоя δ и скорости на границе пограничного слоя U . Последние две величины выбраны соответственно за масштабы длины и скорости. Используя известные частные решения уравнения (1.1) и однородные граничные условия (1.2), получим [9] характеристическое уравнение

$$F(w)(1 + \Delta) = \frac{z}{1 + z} \quad \left(\Delta = \frac{y_k u_0'}{c} - 1, \quad u(y_k) = u_k = c, \quad u_0' = u'(0) \right) \quad (1.3)$$

В первом приближении считают $\Delta = 0$, что дает приемлемую точность при вычислении критических чисел Рейнольдса. Принципиально можно сделать следующее приближение, определив численное значение поправки Δ по первому приближению. В дальнейшем везде используется первое приближение, что позволяет преобразовать (1.3) к виду

$$F^*(w) = [1 - F(w)]^{-1} = 1 + z \quad (1.4)$$

Комплексное равенство (1.4) эквивалентно двум вещественным

$$F_r^*(w) = 1 + z_r, \quad F_i^*(w) = z_i \quad (F^*(w) = F_r^*(w) + iF_i^*(w)) \quad (1.5)$$

$$w = y_k (u_k' \alpha R)^{1/2}, \quad z_r = -\frac{u_0'}{u_k'} + \frac{u_0' c u_k''}{u_k'^3} \ln c + \frac{u_0' c}{\alpha (1 - c)^2}, \quad z_i = -\frac{\pi u_0' c u_k''}{u_k'^3}$$

Здесь $F^*(w)$ — функция Лина.

Придерживаясь схемы, изложенной в работе [4], можно при помощи (1.5) рассчитать кривую нейтральной устойчивости для любого профиля скорости ламинарного пограничного слоя. Критическое число Рейнольдса определяется формулой (аналогичной известной формуле Линя):

$$R_* = 33u_0' (1 - c)^2 (1.5 + 0.185 \ln c) / c^4 \quad (1.6)$$

На фиг. 1 приведено сравнение кривой нейтральной устойчивости для профиля Блазиуса, рассчитанной по формулам (1.5) (кривая 1), с аналогичными кривыми Шлихтинга [10] (кривая 2), Линя [9] (кривая 3), Цаата [11] (кривая 4), а также экспериментальными данными Шубауэра и Скрамстеда [12] (точки 5), Бэрнса, Чайлдса, Никола, Росса [13] (точки 6), Хама [14] (точки 7), Ф. К. Вортмана [15] (точки 8). На фиг. 2 представлены зависимости критического числа Рейнольдса, построенного по толщине вытеснения, от формпараметра Польгаузена при аппроксимации профиля скоростей полиномиальной шестой степени. Кривая 1 построена на основе формулы (1.6). Остальные зависимости соответствуют расчетам Шлихтинга и Ульриха [16] (кривая 2), Цаата [11] (кривая 3), Финстона [17] (кривая 4), Претша [18] (точки 5), Тетервина [19] (точки 6), И. П. Сопруненко [2] (точки 7). В основу расчетов Шлихтинга и Ульриха, так же как и Финстона, использованы приближенные формулы Линя, положено семейство профилей, определяемых полиномом Польгаузена шестой степени. В расчетах Сопруненко использованы профили Хоурта, а в вычислениях Претша и Тетервина — семейство профилей Хартри. Цаат для своих расчетов выбрал семейство профилей, удовлетворяющих асимптотическим условиям при $y \rightarrow \infty$. Пересчет соответствующих параметров производился по способу Шлихтинга [16].



Фиг. 1

Рассмотренное сопоставление свидетельствует, что указанные выше формулы при расчетах устойчивости приводят к результатам, достаточно удовлетворительно согласующимся с экспериментальными и данными других авторов.

Это обстоятельство существенно в том отношении, что методика, использованная для расчетов устойчивости ламинарного пограничного слоя в случае

твердой поверхности, распространяется ниже на случай упругих поверхностей.

§ 2. Устойчивость ламинарного пограничного слоя на поверхности, податливой в нормальном направлении. Граничные условия на податливой поверхности в обсуждаемом случае ставятся так же, как при исследовании соответствующей задачи применительно к течению Пуазейля [4]. Используется следующая связь между деформацией поверхности и нормальным напряжением пульсационного давления на стенке:

$$y^\circ = k^\circ p_{yy} e^{i\theta} \quad (2.1)$$

Здесь k° — постоянная величина, зависящая при заданном возмущении от свойств покрытия, p_{yy} — переменная составляющая давления на поверхности обтекаемого тела, θ_1 — сдвиг фазы между колебаниями напряжения на поверхности и соответствующими вынужденными колебаниями стенки.

Значком $^\circ$ обозначены размерные величины. Нормальное напряжение, действующее в вязкой жидкости на площадку, перпендикулярную оси ординат, выражается формулой

$$p_{yy} = -p + 2\mu dv_y^\circ / dy^\circ$$

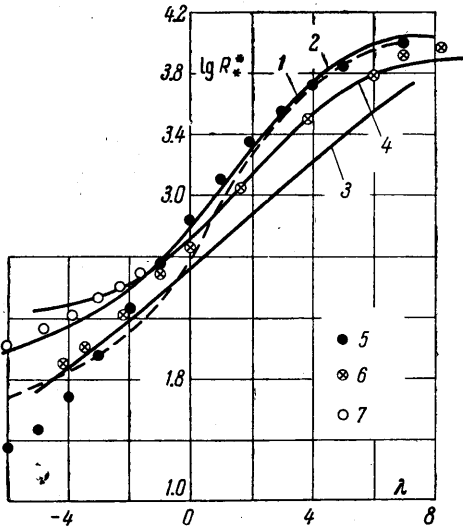
Если стенка не деформируется в касательной плоскости, то производная $dv_x^\circ / dx^\circ \equiv 0$, при $y^\circ = 0$, а следовательно, в силу уравнения нераз-

рывности, которое предполагается справедливым вплоть до границы жидкости, $\partial v_y / \partial y \equiv 0$ при $y = 0$. Поэтому под величиной p_{yy} будем понимать статическое давление p , включая знак минус в сдвиг фаз. В результате граничные условия на стенке записываются [4] так:

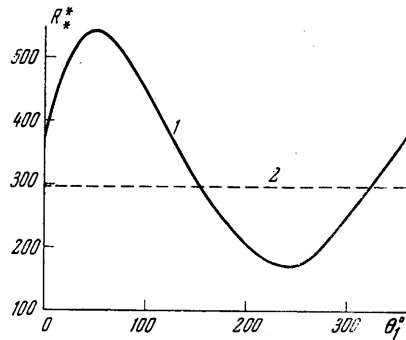
$$(kcu_0' - e^{-i\theta_1}) f(0) + kc \frac{f'''(0)}{i\alpha R} = f'(0) = 0 \quad \left(k = \frac{k^0 \rho U^2}{\delta} \right) \quad (2.2)$$

Граничные условия в потоке возьмем такими же, как и в случае твердой поверхности (1.2). Безразмерная величина k играет роль критерия подобия при моделировании условий работы упругого покрытия.

Принятая связь (2.4), несмотря на свою простоту, охватывает все частные случаи, рассмотренные в работах, упомянутых в [4]. Так, нап-



Фиг. 2



Фиг. 3

пример, пусть движение поверхности описывается уравнением

$$a_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial y_1}{\partial t} + a_3 y_1 + a_4 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = p(x, t) \quad (p(x, t) = p_0 e^{i\alpha(x-ct)})$$

Вынужденные колебания стенки ищем в виде $y_1 = y_{10} \exp [i\alpha(x - ct)]$ для определения k и θ_1 получим

$$ke_{\alpha z}^{i\theta_1} = (a_3 - \alpha^2 c^2 a_1 - i\alpha c a_2 - \alpha^2 a_4)^{-1}$$

Граничные условия (2.2) совместно с двумя последними условиями (1.2) приводят к комплексному характеристическому уравнению:

$$G(w, kc, \theta_1) = 1 + z$$

эквивалентному двум вещественным

$$G_r = 1 + z_r, \quad G_i = z_i \quad (2.3)$$

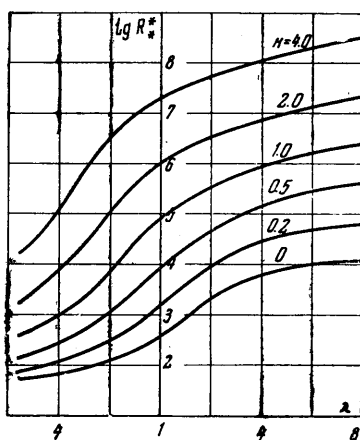
В равенствах (2.3) величины z_r, z_i определяются так же, как в формулах (1.5)

$$G_r = \frac{1 - F_r(w) + A}{(1 - F_r + A)^2 + (B - F_i)^2}, \quad A = \frac{kcu_0' (\cos \theta_1 - kcu_0')}{1 - 2kcu_0' \cos \theta_1 + k^2 c^2 u_0'^2}$$

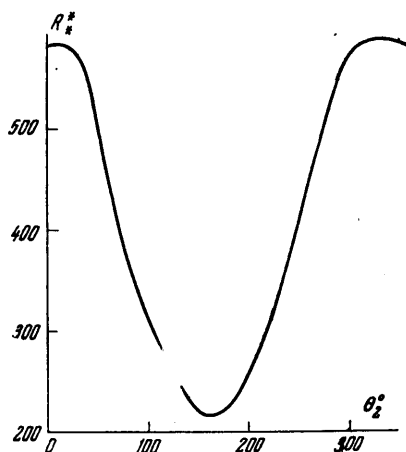
$$G_i = \frac{F_i(w) - B}{(1 - F_r + A)^2 + (B - F_i)^2}, \quad B = \frac{kcu_0' \sin \theta_1}{1 - 2kcu_0' \cos \theta_1 + k^2 c^2 u_0'^2}$$

Здесь $F(w) = F_r(w) + iF_i(w)$ — функция Титьенса.

Система уравнений (2.3) позволяет рассчитать, придерживаясь схемы, изложенной в работе [4], кривую нейтральной устойчивости для любого профиля скорости при заданных величинах k , θ_1 , а также непосредственно определить критическое число Рейнольдса. На фиг. 3 представлены результаты расчетов зависимости критического числа Рейнольдса от параметра θ_1 (кривая 1), выполненных для профиля Блазиуса при $k = 0.1$. Пунктиром нанесена линия 2, соответствующая критическому числу Рейнольдса для жесткой пластины. Зависимости $R_*^* = R_*^*(k, \lambda)$ в случае $\theta_1 = 60^\circ$ показаны на фиг. 4.



Фиг. 4



Фиг. 5

Представляет интерес рассмотрение, на основе полученных результатов, направления потока энергии при взаимодействии пульсаций давления в потоке с гибкой стенкой. Знание этого направления позволяет судить о характере работы покрытия. Если поток энергии направлен от жидкости к стенке, то работу совершают силы давления в потоке, следовательно, покрытие можно классифицировать как «пассивное», колеблющееся под действием указанных сил. Если поток энергии направлен от стенки к жидкости, то работу совершают внешние силы, отличные от сил давления в потоке, и покрытие можно назвать «активным».

Поток энергии через единицу поверхности, перемещающейся со скоростью v_{y1} под действием давления p , вычисляется по формуле

$$N = -pv_{y1} \quad (2.4)$$

Знак минус в (2.4) взят потому, что под действием положительного давления в потоке поверхность движется в отрицательном направлении оси ординат. Если при расчетах по формуле (2.4) величина $N > 0$, то работу производят силы давления, и покрытие является «пассивным». Если $N < 0$, то поток энергии направлен в жидкость, и покрытие работает как «активное». Используя (2.1), нетрудно определить среднюю за период величину потока энергии

$$N_- = -1/2|p|v_{y1}|\sin_2\theta_1$$

Таким образом, если $180^\circ > \theta_1 > 0^\circ$, то $N < 0$ и покрытие следует отнести к «активным»; если $360^\circ > \theta_1 > 180^\circ$, то $N > 0$, и покрытие является «пассивным». Рассмотрение зависимости $R_*^*(\theta_1)$ (фиг. 3) приводит к выводу, что наибольшего эффекта можно достигнуть, управляя пограничным слоем при помощи «активного» покрытия. При большинстве значений углов θ_1 , характерных для «пассивного» покрытия, R_*^* уменьшается по сравнению с твердой поверхностью.

Существует, однако, определенный диапазон углов $360^\circ > \theta_1 > 330^\circ$, обеспечиваемый пассивным покрытием, когда R_*^* возрастает.

Указанные обстоятельства связаны с воздействием упругой стенки на величину напряжений Рейнольдса, являющихся основным источником энергии для возмущающего движения в пограничном слое.

§ 3. Устойчивость ламинарного пограничного слоя на поверхности, податливой в касательном направлении. Граничные условия для функции тока возмущающего движения в рассматриваемом случае ставятся на основе соотношения

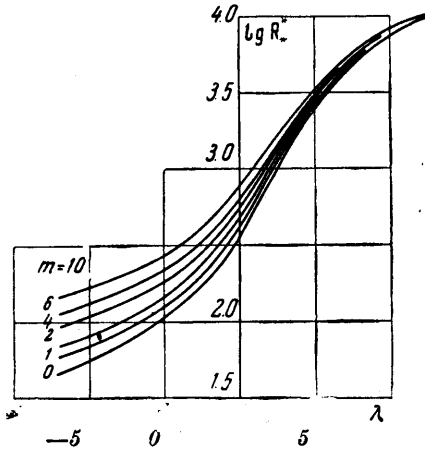
$$x^\circ = m^\circ p_{xy} e^{i\theta_2} \quad (3.1)$$

$$p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{\partial v_y^\circ}{\partial x^\circ} \right)$$

совершенно аналогичного условию (2.1). Если стенка не деформируется в нормальном к поверхности направлении, то $\partial v_y^\circ / \partial x^\circ \equiv 0$ при $y^\circ = 0$, и условия на стенке в безразмерном виде записываются [4] так:

$$f'(0) + \frac{imc\alpha}{R} f''(0) e^{i\theta_2} = f(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$m = \frac{m^\circ \rho U^2}{\delta}$$



Фиг. 6

Характеристическое уравнение задачи с учетом (3.2) может быть записано при условии, что $R \gg 1$, $ma^2/c^2 \ll R^{1/2}$, следующим образом:

$$1/D = 1 + z \quad (3.3)$$

Комплексное уравнение (3.3) эквивалентно двум вещественным

$$\frac{D_r(w, M, \theta_2)}{D_r^2 + D_i^2} = 1 + z_r, \quad - \frac{D_i(w, M, \theta_2)}{D_r^2 + D_i^2} = z_i$$

$$D_r = 1 - F_r(w) + F_r(w) M w^{-3/2} \cos(\theta_2 + 1/4\pi) - F_i(w) M w^{-3/2} \sin(\theta_2 + 1/4\pi)$$

$$D_i = -F_i(w) + F_i(w) M w^{-3/2} \cos(\theta_2 + 1/4\pi) + F_r(w) M w^{-3/2} \sin(\theta_2 + 1/4\pi)$$

$$M = ma^2 c^2 y_k$$

Пользуясь приведенными формулами и упомянутой выше схемой расчета, можно произвести расчет кривой нейтральной устойчивости для любого заданного распределения скоростей в пограничном слое.

Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра θ_2 при $m = 4$ представлена на фиг. 5. Семейство кривых $R_*^*(m, \lambda, \theta_2 = 0)$ показано на фиг. 6. Рассматривая зависимости $R_*^*(m, \lambda)$, можно сделать вывод о незначительном влиянии на устойчивость ламинарного пограничного слоя поверхности, податливой в касательной плоскости. Это влияние, ощущаемое при малых критических числах Рейнольдса (область отрицательных значений параметра λ), уменьшается с ростом λ и при $\lambda \geq 4$ становится практически пренебрежимо малым. Указанное обстоятельство объясняется тем, что влияние податливости поверхности в касательной плоскости на устойчивость пограничного слоя обратно пропорционально числу Рейнольдса, как это следует из первого граничного условия (3.2),

Автор благодарит Г. И. Петрова и В. А. Медведева за обсуждение настоящей работы.

Поступило 8 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер М. О. Boundary layer stabilization by distributed damping. *J. Aeronaut Sci.* 1957, vol. 24, No 6.
2. Крамер М. О. Boundary layer stabilization by distributed damping. *J. Amer. Soc. Naval Engrs.*, 1960, vol. 72, No 1.
3. Крамер М. О. Boundary layer stabilization by distributed damping. *Naval Engrs. J.*, 1962, vol. 74, No 2.
4. Короткин А. И. Устойчивость плоского течения Пуазейля при наличии упругих границ. *ПММ*, 1965, т. 29, вып. 6.
5. Бенжамин Т. В. The threefold classification on unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. *J. Fluid Mech.*, 1963, vol. 16, part. 3.
6. Нонweiler Т. Qualitative solutions of the stability equations for a boundary layer in contact with various forms of flexible surface. *Aeronaut. Res. Council Current Papers*, 1963, No 622.
7. Веcker Е. Die laminare incompressible Grenzschicht an einer durch laufende Wellen deformierten ebenen Wand. *Dtsch. Versuchsanstalt Luftfahrt*, 1960, No 132.
8. Gregory N., Love E. M. Progress report on an experiment on the effect of surface flexibility stability of laminar flow. *Aeronaut. Res. Council. C. P.* 1962, No 602.
9. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд. иностр. лит., 1958.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд. иностр. лит., 1956.
11. Zaat J. A. Numerische Beiträge zur Stabilitätstheorie der Grenzschichten, *Grenzschichtforschung, Symposium, Freiburg*, 1957.
12. Schubaer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary oscillations and stability of laminar flow. *JAS*, 1947, vol. 14, No 2.
13. Burns J. G., Childs W. H., Nicol A. A., Ross M. A. Development and use of a vane device for boundary — layer measurements. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, No 1.
14. Hamma F. R. Boundary layer transition induced by a vibrating ribbon on a flat plate. *Proceedings of the 1960 heat transfer and fluid mechanics institute. Stanford University Press*, 1960.
15. Вортман Ф. К. Исследование неустойчивых колебаний пограничного слоя в водном канале теллурыметодом. Сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи». М.—Л., Госэнергоиздат, 1960.
16. Schlichting H., Ulrich A. Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. *Jb. d. dt. Luftfahrtforschung*, 1942, S. 18.
17. Hahneman E., Freeman J. C., Finston M. Stability of boundary layers and of flow in entrance section of a channel. *JAS*, 1948, vol. 15, No 8.
18. Pretsch J. Die Stabilität einer ebenen laminar-strömung bei Druckgefälle und Druckanstieg. *Jb. d. dt. Luftfahrtforschung*, 1941, S. 58.
19. Tetervin N. A study of the stability of the incompressible boundary layer on infinite wedges. *NACA. Techn. Notes*, 1953, No 2976.
20. Сопруненко И. П. Расчет устойчивости течения пограничного слоя с положительным градиентом давления. *Изв. АН СССР, Механ. и машиностр.*, 1964, № 5.