

## ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО СМЕШЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ АЭРОДИНАМИКИ

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, В. Т. КИРЕЕВ

(Москва)

При решении ряда задач нестационарной и стационарной газовой динамики вводятся тангенциальные разрывы [1]. В силу эффектов вязкости и теплопроводности последние оказываются неустойчивыми [2]. Поэтому целесообразно ввести вместо тангенциального разрыва область смешения и учесть ее взаимодействие с невязкими потоками, поставив на границах этой области условия равенства нулю напряжения трения и равенства составляющих скоростей и температур соответствующим составляющим скоростей и температур невязких потоков. Эта постановка позволяет уточнить решение таких задач, как задачи с неправильным отражением и пересечением ударных волн [1].

Рассмотрение взаимодействия нестационарных областей турбулентного смешения с невязким потоком позволяет также сформулировать ряд задач, в которых эффекты вязкости приводят к полной перестройке картины течения («λ-конфигурация» при взаимодействии отраженной ударной волны с пограничным слоем в ударной трубе [3, 4], формирование зон развитого отрыва перед препятствиями и т. д.).

В этой связи в § 1 проводится анализ автомодельных решений уравнений нестационарного турбулентного смешения (соответствующий анализ уравнений ламинарного смешения, совпадающих с уравнениями пограничного слоя проведен в работе [5]). Указывается, что этими автомодельными решениями описываются, наряду с рядом указанных выше задач, задачи о формировании стационарных струй и зон смешения в донном следе.

В качестве примера в § 2 в рамках предложенной схематизации приближенно решается задача о взаимодействии отраженной от полубесконечной стенки ударной волны с пограничным слоем на горизонтальной пластине за падающей ударной волной. Полученные результаты применяются к анализу отражения в ударной трубке. Приводятся результаты расчетов, находящиеся в качественном соответствии с экспериментами [3, 4].

§ 1. Если зона смешения является «узкой» и аналогична по своим свойствам пограничному слою, то уравнения неразрывности, количества движения и притока тепла для осредненных значений плотности  $\rho$ , давления  $p$ , энтальпии  $i$ , составляющих скоростей  $u$  и  $v$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно при нестационарном турбулентном смешении сжимаемого газа имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \rho \left( \frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial q}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где, в соответствии с гипотезой Прандтля, турбулентное трение  $\tau$  и тепловой поток  $q$  приняты [6]

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad q = \rho \frac{l^2}{P} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial i}{\partial y} \right| \quad \left( P = \frac{l}{l_T} \right) \quad (1.2)$$

Здесь  $l$  — путь смешения при переносе количества движения,  $P$  — число Прандтля,  $l_T$  — путь смешения при переносе тепла.

В переменных  $x, \eta, t$  уравнения (1.1) с учетом (1.2) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial \eta} &= 0 \quad \left( \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_*} dy, \quad v^\circ = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\rho}{\rho_*} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + l^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right)^3 \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial i}{\partial \eta} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{l^2}{P} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right)^3 \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| \frac{\partial i}{\partial \eta} \right] + l^2 \left( \frac{\rho}{\rho_*} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Как и в [5], выражение для функции тока  $\psi$ , плотности  $\rho$  и давления  $p$  будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi_0(x, t) \Phi[\varphi_2(x, t), \zeta], \quad \zeta = \eta \varphi_1(x, t), \quad \rho = \rho_0(x, t) Z^{-1}[\varphi_2, \zeta] \rho_* \\ \rho_* &= \text{const}, \quad p = p_0(x, t), \quad i = i_0(x, t) Z, \quad i = A_0 \frac{p_0}{\rho_0} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v^\circ = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad A_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда, подставляя (1.4) в (1.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_0 \varphi_1)}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \varphi_0 \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial \varphi_2} + \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \zeta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \varphi_0 \varphi_1 \frac{\partial(\varphi_0 \varphi_1)}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2 + \\ + (\varphi_0 \varphi_1)^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial \varphi_2} - \varphi_0 \varphi_1^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} - \\ - (\varphi_0 \varphi_1)^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} + \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{\rho}{\rho_*} = l^2 \rho_0^3 \varphi_0^2 \varphi_1^5 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ Z^{-3} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right] \\ \frac{\partial i_0}{\partial t} Z + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{i_0}{\varphi_1} \zeta \frac{\partial Z}{\partial \zeta} + i_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial Z}{\partial \varphi_2} + \varphi_0 \varphi_1 \frac{\partial i_0}{\partial x} Z \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \varphi_0 \varphi_1 i_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \\ - \varphi_1 i_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Phi \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \varphi_0 \varphi_1 i_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} - \frac{Z}{\rho_* \rho_0} \left( \varphi_0 \varphi_1 \frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial p_0}{\partial t} \right) = \\ = \frac{1}{P} l^2 \rho_0^3 i_0 \varphi_0 \varphi_1^4 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ Z^{-3} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right| \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \right] + l^2 \rho_0^3 \varphi_1^6 \varphi_0^3 \left( Z^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right)^3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Разделив на  $l^2 \varphi_0^2 \varphi_1^5 \rho_0^3$  все члены первого уравнения и на  $l^2 i_0 \varphi_0 \varphi_1^4 \rho_0^3$  все члены второго уравнения (1.5), получим соотношения, являющиеся достаточными, чтобы соответствующий им режим был автомодельным

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_0 \varphi_1)}{\partial t} \frac{1}{l^2 \varphi_0^2 \varphi_1^5 \rho_0^3} &= A(\varphi_2), \quad \frac{\partial(\varphi_0 \varphi_1)}{\partial x} \frac{1}{l^2 \varphi_0 \varphi_1^4 \rho_0^3} = D(\varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{1}{l^2 \varphi_0 \varphi_1^5 \rho_0^3} &= B(\varphi_2), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{1}{l^2 \varphi_1^3 \rho_0^3} = E(\varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{1}{l^2 \varphi_0 \varphi_2^4 \rho_0^3} &= C(\varphi_2), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{1}{l^2 \varphi_0 \varphi_1^3 \rho_0^3} = F(\varphi_2) \\ \frac{i_0}{\varphi_0^2 \varphi_1^2} &= H(\varphi_2), \quad \varphi_0 \varphi_1 \frac{\partial p_0}{\partial x} = G(\varphi_2) \frac{\partial p_0}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Так же как в [5], определяя отсюда значения  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ , получим (два последних соотношения (1.6) используются для определения  $i_0$  и  $p_0$ ):

$$1^\circ. \text{ Для } \varphi_2 \equiv \text{const} \quad (C \equiv 0, E \equiv 0) \quad (1.7)$$

При  $A \neq 0, D \neq 0$

$$\varphi_0 = x^{\frac{F}{D}} t^{\frac{B}{A}-1}, \quad \varphi_1 = x^{1-\frac{F}{D}} t^{-\frac{B}{A}}$$

$$(\rho_0^{3l^2} = x^3 \frac{F}{D} t^{-4} \frac{B}{A}, \quad p_0 = x^m t^n, \quad i_0 = x^{2l-2}) \quad (1.8)$$

При  $A = 0, D \neq 0$

$$\varphi_0 = x^{\frac{F}{D}} e^{kt}, \quad \varphi_1 = x^{1-\frac{F}{D}} e^{-kt}$$

$$(\rho_0^{3l^2} = x^3 \frac{F}{D} e^{-4k}, \quad p_0 = x^m e^{nt}, \quad i_0 = x^2) \quad (1.9)$$

При  $A \neq 0, D = 0$

$$\varphi_0 = t^{\frac{B}{A}-1} e^{l_1 x}, \quad \varphi_1 = t^{-\frac{B}{A}} e^{-l_1 x}$$

$$(\rho_0^{3l^2} = t^3 \frac{B}{A} \exp(-2l_1 x), \quad p_0 = t^n \exp mx, \quad i_0 = t^{-2})$$

В (1.7) — (1.9) опущены не существенные для дальнейшего постоянные множители;  $m, n, k, l$  — некоторые постоянные.

Случай  $A = B = C \equiv 0$  соответствует установившемуся режиму течения.

$$2^\circ. \text{ Для } \varphi_2 \neq \text{const} \quad (C \neq 0, E \neq 0) \text{ из (1.6) получим.} \quad (1.10)$$

$$\text{При } \frac{B}{C} - \frac{D-F}{E} \neq 0, \quad \frac{F}{E} - \frac{A-B}{C} \neq 0$$

$$\varphi_0 = K(x) \exp \int \frac{A-B}{C} d\varphi_2 = L(t) \exp \int \frac{F}{E} d\varphi_2, \quad N = K^n$$

$$\varphi_1 = N(x) \exp \int \frac{B}{C} d\varphi_2 = M(t) \exp \int \frac{D-F}{F} d\varphi_2, \quad M = L^n$$

$$\varphi_2 = \varphi_2 \left( \frac{K}{L} \right), \quad K = x^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (\alpha \neq 1), \quad K = e^{\beta x} \quad (\alpha = 1)$$

$$L = t^{-\frac{1}{n+\alpha}} \quad (n + \alpha \neq 0), \quad L = e^{\beta t} \quad (n + \alpha = 0)$$

$$\text{При } \frac{B}{C} - \frac{D-F}{F} \neq 0, \quad \frac{F}{E} - \frac{A-B}{C} = 0, \quad F \neq 0$$

$$\varphi_0 = \exp \int \frac{A-B}{C} d\varphi_2 = \exp \int \frac{F}{E} d\varphi_2, \quad M = t^{\frac{n}{1-n}} \quad (n \neq 1)$$

$$\varphi_1 = N(x) \exp \int \frac{B}{C} d\varphi_2 = M(t) \exp \int \frac{D-F}{E} d\varphi_2, \quad M = e^{\beta t} \quad (n = 1)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2 \left( \frac{M}{N} \right), \quad N = x^n \quad (n \neq \infty), \quad N = e^{\beta x} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.11)$$

при  $F = 0$ ,

$$\varphi_0 \equiv \text{const}$$

$$\varphi_1 = N(x) \exp \int \frac{B}{C} d\varphi_2 = M(t) \int \exp \frac{D}{E} d\varphi_2, \quad N = x^n, \quad M = t^{\frac{n}{1-n}} \quad (n \neq 1)$$

$$\text{При } \frac{B}{C} - \frac{D-F}{E} = 0, \quad \frac{F}{E} - \frac{A-B}{C} \neq 0 \quad (1.12)$$

$$\Phi_0 = K(x) \exp \int \frac{A-B}{C} d\Phi_2 = L(t) \exp \int \frac{F}{E} d\Phi_2$$

$$\Phi_1 = \exp \int \frac{B}{C} d\Phi_2 = \exp \int \frac{D-F}{E} d\Phi_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(K/L), \quad K = x^{1/\alpha} \quad (\alpha \neq 0), \quad K = e^{\beta x} \quad (\alpha = 0)$$

$$L = t^{\alpha-1} \quad (\alpha \neq 1), \quad L = e^{\beta_1 t} \quad (\alpha = 1)$$

( $n, \alpha, \beta, \beta_1$  в (1.10) — (1.12) — постоянные величины)

В частности, из (1.10) при  $n = -1$  и  $\alpha = 0$  имеем для (1.3)

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v^\circ}{\partial Y} = 0 \quad \left( l = cx, \quad X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{\eta}{t} \right)$$

$$(u-X) \frac{\partial u}{\partial X} + (v^\circ - Y) \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + c^2 X^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right)^3 \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (1.13)$$

$$(u-X) \frac{\partial i}{\partial X} + (v^\circ - Y) \frac{\partial i}{\partial Y} - \frac{(u-X)}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} = \\ = \frac{c^2}{P} X^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right)^3 \frac{\partial i}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Y} \right] + c^2 X^2 \left( \frac{\rho}{\rho_*} \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^3$$

Эти уравнения могут быть получены из (1.3) методом размерностей и подобия [7] (если условия задачи не содержат размерных постоянных, из которых можно получить размерность длины или времени) и использованы для решения автомодельных задач взаимодействия зон смешения с невязкими течениями, включая задачи с тангенциальными разрывами и формирования зон смешения в донном следе.

Соотношения (1.10) включают в себя также случай

$$\psi = x^{1/2} \Phi(Y_1, \zeta), \quad Y_1 = \frac{y}{x}, \quad \zeta = \frac{x}{t^{2/3}}, \\ (l = cx, \quad n = -2, \quad \alpha = -1, \quad \rho = \text{const}) \quad (1.14)$$

соответствующий формированию плоской струи.

В (1.7) содержится, в частности, автомодельный режим

$$1/2 (\Phi_i''^2)' + 2\Phi_i \Phi_i'' - \Phi_i' (\Phi_i' - 1) = D_1$$

$$\psi = \kappa \frac{x^2}{t} \Phi_i \left( \frac{y}{\kappa x} \right), \quad p = D_0 + D_1 x^2 t^{-2} \quad (1.15)$$

$$l = cx, \quad B/A = 0, \quad F/D = 2$$

$$(\kappa = (2c^2)^{1/3}, \quad D_0 = \text{const}, \quad D_1 = \text{const})$$

который может быть получен из (1.3), когда условия задачи не содержат размерных постоянных, из которых можно получить размерность длины, времени и скорости ( $\rho = \text{const}$ ). Эти уравнения описывают развитие смешения газа из состояния покоя.

Дополнительно отметим, что в системе координат  $x_n = U_n t - x$ ,  $y_n = V_n t - y$ , движущейся с постоянной скоростью, если параметры течения зависят только от переменных  $x_n, y_n$ , система уравнений (1.1) принимает вид, полностью совпадающий с уравнениями стационарной

свободной турбулентности, если  $l = cx_n$ , и на внешних границах зоны смешения параметры течения не изменяются.

$$\frac{\partial(\rho u_n)}{\partial x_n} + \frac{\partial(\rho v_n)}{\partial y_n} = 0 \quad (u_n = V_n - u, v_n = V_n - v)$$

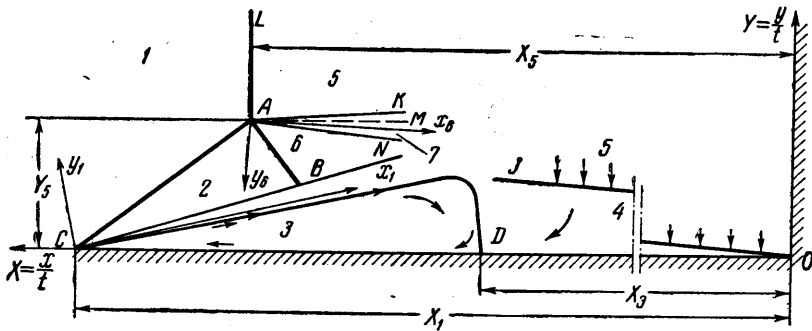
$$\rho \left( u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \right) = c^2 x_n^2 \frac{\partial}{\partial y_n} \left[ \rho \left( \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \right)^2 \right] \quad (1.16)$$

$$\rho \left( u_n \frac{\partial i}{\partial x_n} + v_n \frac{\partial i}{\partial y_n} \right) = \frac{c^2}{P} x_n^2 \frac{\partial}{\partial y_n} \left[ \rho \frac{\partial i}{\partial y_n} \frac{\partial u}{\partial y_n} \right] + c^2 x_n^2 \rho \left( \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \right)^3$$

Решение системы (1.16) имеет смысл, если в новой системе координат  $x_n, y_n$  поперечные скорости  $v_n$  много меньше продольных  $u_n$ . Полученные результаты могут быть обобщены на осесимметричное течение.

§ 2. В качестве примера использования приведенных выше режимов течения рассмотрим взаимодействие отраженной ударной волны (от торца ударной трубки) с нестационарным пограничным слоем за падающей ударной волной при турбулентном отрыве последнего.

Эксперименты показывают, что при определенных условиях [3] происходит отрыв пограничного слоя, приводящий к накоплению газа в области 3 (фиг. 1) и возникновению ударной волны  $AC$ . При пересечении последней с отраженной от торца ударной волной



Фиг. 1

волной  $AL$  образуется ударная волна  $AB$ . Размеры областей 2 и 3 увеличиваются со временем. При этом отмечается уменьшение скорости отраженной ударной волны по длине трубы [3], обусловленное этим взаимодействием. Плотность в области 3 практически постоянна по ее длине [4] и меньше плотности за отраженной ударной волной.

Рассмотрим сначала течение при отражении от полубесконечной стенки  $OY$ , предполагая, что около горизонтальной стенки  $OX$  имеется вязкий поток, описываемый уравнениями нестационарной свободной турбулентности (1.1), над которым течет невязкий газ. Таким образом, как и в [3], при этой схематизации течения пренебрегаем толщинами пограничных слоев на  $OX$  по сравнению с поперечными размерами областей 3, 4.

В этом случае условия задачи (при соответствующей зависимости для пути смешения) не будут содержать размерных постоянных, из которых можно получить размерность длины или времени. Поэтому двумерное нестационарное течение невязкого газа и нестационарное смешение будут автомодельными (1.13). При этом в системе координат  $x_1, y_1$ , связанной с точкой  $C$  (движущейся с постоянной скоростью  $U_1 = X_1$ ), невязкий поток 2 за скачком  $AC$  (если последний прямолинеен) будет стационарным и однородным вплоть до некоторого возмущения, распространяющегося навстречу этому потоку. Таким возмущением является скачок  $AB$ .

Учитывая (1.16), при определении параметров в областях течения 3, 2 будем использовать результаты [8, 9], полученные при исследовании стационарных турбулентных отрывных зон на пластине перед клином, в частности, зависимость угла поворота набегающего потока  $\beta_2$  от числа Маха  $M_1$  этого потока

$$\beta_2 = \beta_2(M_1) \quad (2.1)$$

имеющую место при произвольном положении точки отрыва.

Перейдем к анализу течения в окрестности точки А. Обычно [1] в задачах с пересекающимися ударными волнами в точке их пересечения вводится тангенциальный разрыв (пунктир АМ), на котором ставится условие равенства давлений

$$p_5 = p_6 \tag{2.2}$$

и условие параллельности разделяемых им потоков

$$[v_5 \parallel v_6 \tag{2.3}$$

Наличие двух потоков, имеющих разные скорости и плотности, приводит к их смещению и возникновению поперечных к тангенциальному разрыву составляющих скоростей [2].

В случае турбулентного смешения стационарных потоков зависимость угла  $\delta$  между направлениями смешивающихся потоков от отношения модулей векторов скоростей  $|V_n|$  и  $|V_{n-1}|$  этих потоков можно получить, если известна постоянная  $c$ .

Для несжимаемого газа из работы [10] имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}, \quad u_{n-1} = U_n F'_{n-1}, \quad v_{n-1} = \kappa U_n (\Phi_{n-1} F'_{n-1} - F_{n-1}) \\ F &= \frac{\Phi_n - 1}{3} e^{-\varphi^\circ} + e^{1/2 \varphi^\circ} \left[ \frac{1 + 2\Phi_n}{3} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi^\circ \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi^\circ \right) \right] \\ \frac{\Phi_n - 1}{3} e^{-\varphi^\circ \cdot n-1} + e^{1/2 \varphi^\circ \cdot n-1} &\left[ \frac{1 - \Phi_n}{3} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi_{n-1}^\circ \right) - \frac{1 + \Phi_n}{\sqrt{3}} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi_{n-1}^\circ \right) \right] \\ u_n &= U_n F'_n, \quad v_n = 0, \quad F'_n = 1, \quad \varphi^\circ = \varphi - \Phi_n, \quad \varphi = y / \kappa x \\ &(\text{ось } x_n \text{ совпадает с направлением вектора скорости } V_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Задавая ряд значений  $\Phi_{n-1}^\circ$ , из приведенных уравнений получим



Фиг. 2

Точка А движется с постоянной скоростью, составляющие которой  $U = X_5$ ,  $V = Y_5$ , поэтому, учитывая (1.16) и совмещая направление оси  $x_6$  с направлением вектора скорости  $V_6$  (оно будет определено в дальнейшем), можно использовать (для  $\rho = \text{const}$  и  $p = \text{const}$ ) в окрестности точки А условие (2.5), заменив в последнем индексе  $n$  на индекс 6.

Записывая в системе прямоугольных координат  $x_6 y_6$ , связанной с точкой А, соотношения на скачках уплотнения АС, АВ, и используя условие (2.1) на скачке АС, а также (2.2) и (2.5), вместо (2.3) на границах зоны смешения КАН получим замкнутую систему алгебраических уравнений (параметры потока в областях 1 и 5 известны) для определения координат точек А, С, угла наклона скачка АВ, а также значений параметров потока в областях 2 и 6. При этом в области смешения 3, включающей в себя возвратное течение (в системе координат, связанной с точкой С), будем использовать [8, 9], а в области смешения 7 — соотношения (2.4).

На фиг. 2 для  $\gamma = 1,4$  представлены графики изменения углов наклона  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_6$  скачков АС и АВ (к направлениям — ОХ и ОХ соответственно) и значения  $\chi_1^* = (X_1 - X_5) / a_1$  в зависимости от интенсивности падающей ударной волны  $M_{11} = U_0 / a_0$  (зависимость (2.1) взята из [8, 9],  $\kappa = 0.074$  в (2.4),  $U_0$  — скорость падающей ударной волны,  $a_0$  — скорость звука перед ней).

Отметим, что в рассмотренном случае течения влияние смещения в окрестности точки А невелико, разница в числовых значениях  $\epsilon_2$  при использовании (2.3) вместо (2.5) не превосходит одного градуса.

При определении размеров области смещения 3 в плоскости ХУ будем предполагать, что струйка тока, состоящая из частиц газа, примыкающих к горизонтальной стенке в пограничном слое за падающей ударной волной и оторвавшаяся от стенки в области 3 (разделительная линия тока СЕ), вновь возвращается на горизонтальную стенку в точке D. В качестве оценки определим ее координату X<sub>3</sub>, предполагая, что частицы газа на разделительной линии, заторможенные в системе координат, связанной с точкой D, будут иметь давление p<sub>5</sub>, равное давлению за отраженной ударной волной. При этом торможение этих частиц происходит так же, как в простой, одномерной, нестационарной изэнтропической волне сжатия. Тогда

$$\frac{X_1 - X_3}{a_2} = \frac{a_3^*}{a_2} M_3^* - \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_5}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (2.6)$$

Здесь a<sub>3</sub><sup>\*</sup> — скорость звука, M<sub>3</sub><sup>\*</sup> — число Маха на разделительной линии в системе координат, связанной с точкой С.

Соотношение (2.6), по аналогии с условием Чепмена — Корста в стационарных задачах [11], обуславливает возможность проникновения в область 6 только частиц газа, находящихся выше разделительной линии в области 3.

График зависимости X<sub>3</sub><sup>\*</sup> = (X<sub>1</sub> - X<sub>3</sub>) / a<sub>1</sub> от M<sub>11</sub> приведен на фиг. 2 (γ = 1.4). Перейдем к анализу течения справа от точки D, полагая

$$\rho_4 = \rho_5 = \text{const}, \quad p_4 = p_5 = \text{const}$$

На нижней границе OD области смещения 4 и на ее верхней границе OJ (y = y<sub>45</sub>), которая примыкает к покоящемуся газу с однородными параметрами 5, имеем

$$v_4 = 0, \quad \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.7)$$

$$u_4 = 0, \quad \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = y_{45}(x, t)$$

Наличие движения газа в окрестности точки D приводит к условию, вытекающему из (2.6)

$$X_3 = u_D = x_D / t \quad \text{при } y = 0 \quad (2.8)$$

Условия (2.7), (2.8) таковы, что течение правее D удовлетворяет (1.15) при D<sub>1</sub> = 0. Тогда

$$u_4 = \frac{x}{t} \Phi_4', \quad v_4 = \kappa \frac{x}{t} (\varphi \Phi_4' - 2\Phi_4) \quad (2.9)$$

Граничные условия (2.7), (2.8) примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_4 = 0, \quad \Phi_4' = 1, \quad \Phi_4'' = 0 \quad \text{при } \varphi = 0 \\ \Phi_4' = 0, \quad \Phi_4'' = 0 \quad \text{при } \varphi = \varphi_{45} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отметим, что Φ<sub>4</sub><sup>''</sup> = 0 при φ = φ<sub>45</sub> в силу (1.15) автоматически выполняется при Φ<sub>4</sub><sup>'</sup> = 0; необходимое в дальнейшем значение Φ<sub>4</sub> = Φ<sub>45</sub> при φ = φ<sub>45</sub> приблизительно равно единице.

В том случае, когда отражение волны происходит от торца ударной трубы (с площадью A° и периметром поперечного сечения l°), изменение скорости ударной волны (постоянной для неограниченной вертикальной стенки) определим тем же путем, как в работах [12, 13], предполагая, что закон изменения вертикальной составляющей скорости (2.9) имеет место вплоть до отраженного скачка уплотнения.

Линеаризованные (около параметров покоящегося газа в области 5) уравнения одномерного нестационарного течения с источниками массы m(x, t) имеют характеристики

$$d(\Delta p_5) = \mp \rho_5 a_5 d(\Delta u_5) \mp a_5^2 m dt \quad (2.11)$$

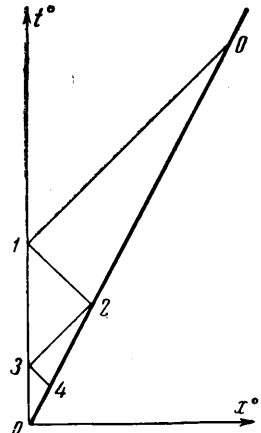
$$\frac{dx}{dt} = \pm a_5 \quad \left( m = \frac{l^{\circ} \rho_5}{A^{\circ}} v_{45}, \quad v_{45} = -2\kappa \Phi_{45} \frac{x}{t} \right)$$

Вводя безразмерные параметры

$$x = l^{\circ} x^{\circ}, \quad t = \frac{l^{\circ}}{a_5} t^{\circ}, \quad p^{\circ} = \frac{\Delta p_5}{p_5}, \quad u^{\circ} = \frac{\Delta u_5}{a_5} \quad (2.12)$$

перепишем (2.11) в виде

$$\frac{dx^{\circ}}{dt^{\circ}} = \pm 1, \quad dp^{\circ} = \mp \gamma du^{\circ} - 2\gamma \kappa \Phi_{45} \frac{l^{\circ 2}}{A^{\circ}} \frac{x^{\circ}}{t^{\circ}} dt^{\circ} \quad (2.13)$$



Фиг. 3

На отраженной ударной волне имеем [13]

$$\begin{aligned} \frac{dx^\circ}{dt^\circ} &= X_5^\circ, & p^\circ &= E^\circ u^\circ, & \Delta X_5^\circ &= D^\circ p^\circ \\ E^\circ &= 2\gamma \frac{a_{51}}{p_{51}} \frac{M_{51}}{1 + M_{51}^2}, & D^\circ &= \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{p_{51}}{M_{51} a_{51}} \\ M_{51} &= \frac{X_5 + u_1}{a_1}, & p_{51} &= \frac{p_5}{p_1}, & a_{51} &= \frac{a_5}{a_1}, & X_5^\circ &= \frac{X_5}{a_5}, & \Delta X_5^\circ &= \frac{\Delta X_5}{a_5} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Проводя интегрирование вдоль характеристик 4-3, 3-2, 2-1, 1-0 ( $u_i^\circ = 0$  при  $x=0$ ), получим значение изменения давления в произвольной точке 0 (фиг. 3) ударной волны 0<sub>0</sub>

$$\begin{aligned} p^\circ &= -2\kappa \Phi_{45} \frac{l^{\circ 2}}{A^\circ} \frac{E^\circ}{E^\circ + \gamma} \gamma x^\circ \left[ \frac{2 X_5^\circ}{1 + X_5^\circ} + \frac{1 - X_5^\circ}{X_5^\circ} \right. \\ &\quad \left. \cdot \ln \left( 1 - 2X_5^{\circ 2} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1 - X_5^\circ}{1 + X_5^\circ} \frac{E^\circ - \gamma}{E^\circ + \gamma} \right)^n \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь первое слагаемое соответствует влиянию на  $p^\circ$  характеристик 1-0 и 2-1, второе — характеристик — 3-2 и 4-3 и т. д. При этом наибольшее влияние оказывают характеристики 1-0 и 2-1.

Из (2.15) и (2.14) видно, что скорость отраженной ударной волны и давление за ней уменьшаются прямопропорционально расстоянию, пройденному этой волной

Поступило 31 XII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, К. Фридрихс. Сверхзвуковые течения и ударные волны, М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя, Изд-во иностр. лит., 1956.
3. H. Mark. The Interaction of a Reflected Shock Wave with the Boundary Layer in a Shock Tube JAS, 1958, v. 24, No 4.
4. С. Г. Зайцев, А. П. Шатилов, Е. В. Лазарева, Л. Н. Труханова. Исследование процесса взаимодействия отраженного разрыва с пограничным слоем потока за падающей ударной волной. В сб.: Физическая газодинамика. Под ред. А. С. Предводителева, «Наука», 1964.
5. Ю. А. Демьянов. Об одном классе нестационарных автомодельных движений газа в ламинарном пограничном слое. Научн. докл. высшей школы. Физико-матем. науки, 1958, № 5.
6. Е. Е. Солодкин. К вопросу о возможности использования моделей турбулентного потока Прандтля и Тейлора при решении задач о турбулентном течении газа при отсутствии твердых границ. — В кн.: Промышленная аэродинамика, Оборонгиз, 1962, вып. 23.
7. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
8. Ю. А. Демьянов, В. Н. Шманенков. Турбулентная отрывная зона в потоке сжимаемого газа. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3.
9. D. Charman, D. Kuehn, H. Larson. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA Rept., 1356, 1958.
10. В. Я. Нейланд, Г. И. Таганов. О характере течения в срывной зоне. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 3.
11. Г. Г. Корст. Теория определения донного давления в околозвуковых и сверхзвуковых потоках. Сб. переводов «Механика», 1957, № 5.
12. Ю. А. Демьянов. Влияние пограничного слоя на характер течения газа в трубе за движущейся ударной волной. ПИМ, 1957, № 21, вып. 4.
13. Г. Майрлс. Затухание в ударной трубе, обусловленное действием неустановившегося пограничного слоя. В сб.: Ударные трубы. Под ред. Х. А. Рахматулина и С. С. Семенова. М., Изд. иностр. лит., 1962.