Следовательно, при малых темпах закачки и значительном удалении нагнетательной и эксплуатационной скважин в охлажденных пластах (когда ε будет большим) пара скважин будет создавать конечную зону вытеснения, ширина которой

$$2y_C \approx \frac{Q}{v_0} = \frac{\mu Q}{k\tau_0} \tag{3.7}$$

Если же $\varepsilon \to \infty$, то имеют место оценки

$$x_B \approx -\frac{2}{3\sqrt{\pi\varepsilon}}, \quad y_C \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi\varepsilon}} \tag{3.8}$$

На фиг. 10 показана зависимость размеров области течения от ε, а на фиг. 11 нанесены контуры границы течения для некоторых значений ε.

Поступило 27 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
2. Березкина Г. М. К вопросу изменения водопроницаемости связных грунтов от градиента напора. Вестн. Моск. ун-та, 1965, № 1.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУКТУРЫ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПО ЕЕ РАЗРЕЗУ

П. Л. АРОН, М. А. БУХБИНДЕР

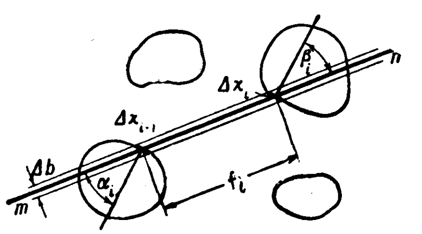
(*Кишинев*)

При определении свойств пористой среды в качестве геометрической характеристики структуры порового пространства может быть использована удельная протяженность периметра сечений пор в плоском разрезе пористой среды [1, 2].

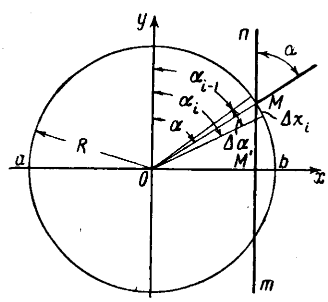
Удельная протяженность периметра пор t измеряется отношением длины χ периметра пор, ограничивающего некоторую область сечения порового пространства, к площади S этой области

$$t = \chi / S \tag{1}$$

Если выбрать площадь S достаточно малой, то при переходе от одной области сечения порового пространства к другой значение t будет меняться. Естественно поэтому рассматривать удельную протяженность периметра пор как функцию двух случайных величин χ и S, связанную зависимостью (1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже делается попытка найти выражения для функции и плотности распределения величины t. Задача решается только для изотропных пористых сред.

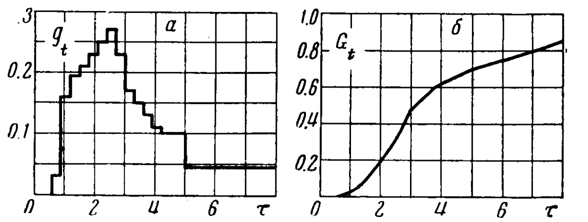
Проведем на плоском разрезе (шлифе) пористой среды ряд произвольно ориентированных линий — случайных секущих. Те отрезки секущих, которые окажутся в пределах пор, будем называть «промежутками» и обозначать через f (например, f_i между частицами на фиг. 1). Выделим при каждой секущей полоску шириной Δb, средней линией которой будет случайная секущая. Эти полоски отсекут на границах пор элементы $\Delta\chi$, каждый из которых при достаточно малой величине Δb можно считать частью прямой линии.

Обозначим отрезки границ пор, прилегающие к промежутку f_i, через $\Delta\chi_{i-1}$ и $\Delta\chi_i$, а углы между секущей и нормалями к границам пор в точках пересечения — соответственно через α_i и β_i (фиг. 1). Тогда для i-й полоски можно написать

$$t_i = \frac{\Delta\chi_{i-1} + \Delta\chi_i}{S_i} = \frac{\Delta b \sec\alpha_i + \Delta b \sec\beta_i}{\Delta b f_i} = \frac{\sec\alpha_i + \sec\beta_i}{f_i} \tag{2}$$

Таким образом, удельную протяженность периметра пор можно рассматривать как функцию случайных величин $Y = \sec\alpha + \sec\beta$ и f:

$$t = Y / f \qquad (3)$$



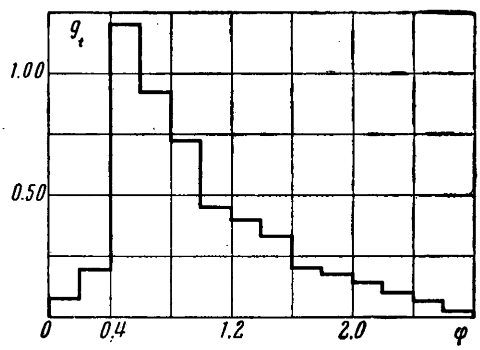
Фиг. 3

Закон распределения t можно найти по общим правилам теории вероятностей, если известны законы распределения Y и f.

Закон распределения f может быть найден эмпирически путем статистической обработки результатов измерений достаточно большого числа промежутков на шлифе пористой среды под микроскопом или на микрофотографии [3, 4]. Закон распределения величины Y можно получить теоретически, основываясь на геометрических свойствах изотропной пористой среды.

Найдем закон распределения величины $\sec\alpha$ ($\sec\beta$).

Вследствие изотропности пористой среды любая ориентация отрезков $\Delta\chi$ равновероятна. Из теории вероятностей известно, что таким же свойством обладают элементы окружности. Поэтому, если все отрезки $\Delta\chi$, расположенные в пределах некоторой области шлифа, перенести на окружность, то (при $\Delta\chi \to 0$) они расположатся на этой окружности равномерно [5] [1]. Отсюда следует, что угол α имеет такое же распределение, как угол между линией, случайным образом пересекающей окружность, и нормалью к окружности в точке пересечения.



Фиг. 4

Пусть прямая mn пересекает окружность радиусом R (фиг. 2). Свяжем с диаметром, перпендикулярным к линии mn, ось x прямоугольной системы координат. Случайность проведения секущих предполагает их равномерное размещение на плоскости. Поэтому при выводе распределения $\sec\alpha$ будем полагать, что точки M' пересечения прямой mn с диаметром ab равномерно распределены по длине этого диаметра.

Разделим окружность на k элементов таким образом, чтобы каждому элементу $\Delta\chi_i$ соответствовал один и тот же центральный угол $\Delta\alpha = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ ($i = 1, \ldots, k$). Очевидно, что событие, состоящее в попадании точки M пересечения прямой mn с окружностью в элемент $\Delta\chi_i$, эквивалентно попаданию точки M' в проекцию элемента $\Delta\chi_i$ на ось x; поэтому равны и вероятности этих событий. На основании приведенных соображений найдем функцию распределения величины $X = \sec\alpha$

$$G_X(\xi) = P\{X \leqslant \xi\} = P\{\sec\alpha \leqslant \xi\} = P\{\cos\alpha \geqslant \xi^{-1}\} =$$
$$= P\{\sin\alpha \leqslant \sqrt{1-\xi^{-2}}\} = \sqrt{1-\xi^{-2}} \quad (\xi \geqslant 1) \qquad (4)$$

Плотность распределения X

$$g_X(\xi) = G_X'(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 1 \\ \left(\xi^2\sqrt{\xi^2-1}\right)^{-1} & \text{при } \xi \geqslant 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Очевидно, что такое же распределение имеет случайная величина $X_1 = \sec\beta$.

Найдем распределение величины $Y = \sec\alpha + \sec\beta$, приняв, что α и β взаимно независимы.

Функция распределения Y равна свертке функций распределения X и X_1

$$G_Y(\eta) = P\{Y \leqslant \eta\} = \int_1^{\eta-1} G_X(\eta-\xi)\,dG_X(\xi) = \int_1^{\eta-1} G_X(\eta-\xi)\,g_X(\xi)\,d\xi \qquad (6)$$

[1] Койда Н. У. Определение гидравлического сопротивления пористого материала по его структуре (Диссертация на соиск. канд. техн. н., ЛИИЖТ, 1954).

а также плотность распределения величины Y

$$g_Y(\eta) = G_Y'(\eta) = \int_1^{\eta-1} g_X(\eta - \xi)\, dG_X(\xi) = \int_1^{\eta-1} g_X(\eta - \xi)\, g_X(\xi)\, d\xi \tag{7}$$

С учетом (4) и (5) получаем для $G_Y(\eta)$ и $g_Y(\eta)$ следующие выражения:

$$G_Y(\eta) = 0 \text{ при } \eta < 2; \qquad G_Y(\eta) = \int_1^{\eta-1} \frac{\sqrt{(\eta-\xi)^2 - 1}}{(\eta-\xi)^2 \xi^2 \sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi \quad \text{при } \eta \geqslant 2 \tag{8}$$

$$g_Y(\eta) = 0 \text{ при } \eta < 2, \qquad g_Y(\eta) = \int_1^{\eta-1} \frac{d\xi}{\xi^2 (\eta-\xi)^2 \sqrt{(\xi^2 - 1)[(\eta-\xi)^2 - 1]}} \quad \text{при } \eta \geqslant 2 \tag{9}$$

Так как интегралы (8) и (9) не берутся в элементарных функциях, то здесь приводится таблица значений $G_Y(\eta)$ и $g_Y(\eta)$.

Функции $G_Y(\eta)$ и $g_Y(\eta)$

η	G_Y	g_Y	η	G_Y	g_Y	η	G_Y	g_Y	η	G_Y	g_Y
2.0	0	1.571	3.4	0.796	0.172	4.8	0.924	0.046	6.4	0.970	0.017
2.1	0.142	1.275	3.5	0.812	0.153	4.9	0.929	0.043	6.6	0.974	0.015
2.2	0.258	1.041	3.6	0.827	0.139	5.0	0.933	0.040	6.8	0.976	0.013
2.3	0.353	0.860	3.7	0.840	0.123	5.1	0.937	0.038	7.0	0.979	0.012
2.4	0.432	0.715	3.8	0.852	0.111	5.2	0.940	0.036	7.2	0.981	0.011
2.5	0.498	0.605	3.9	0.861	0.101	5.3	9.944	0.034	7.4	0.983	0.010
2.6	0.554	0.508	4.0	0.872	0.092	5.4	0.947	0.032	7.6	0.985	0.009
2.7	0.601	0.435	4.1	0.881	0.082	5.5	0.950	0.030	7.8	0.987	0.008
2.8	0.642	0.378	4.2	0.888	0.076	5.6	0.953	0.028	8.0	0.988	0.007
2.9	0.677	0.325	4.3	0.896	0.068	5.7	0.956	0.026	8.5	0.991	0.005
3.0	0.707	0.283	4.4	0.902	0.063	5.8	0.958	0.024	9.0	0.993	0.004
3.1	0.734	0.248	4.5	0.908	0.059	5.9	0.961	0.022	9.5	0.995	0.003
3.2	0.757	0.217	4.6	0.914	0.054	6.0	9.963	0.021	10.0	0.996	0.002
3.3	0.778	0.192	4.7	0.919	0.049	6.2	0.967	0.019	15.0	0.997	0.001
									∞	1.000	0

При выводе закона распределения величины $t = Y / f$ примем, что Y и f взаимно независимы. Как известно, функция распределения t

$$G_t(\tau) = P\{t \leqslant \tau\} = \int_0^{\infty} G_Y(\tau\varphi)\, dG_f(\varphi) = \int_{2/\varphi}^{\infty} G_Y(\tau\varphi)\, g_f(\varphi)\, d\varphi \tag{10}$$

и плотность распределения

$$g_t(\tau) = G_t'(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi g_Y(\tau\varphi)\, dG_f(\varphi) = \int_{2/\varphi}^{\infty} \varphi g_Y(\tau\varphi)\, g_f(\varphi)\, d\varphi \tag{11}$$

Здесь $G_f(\varphi)$ и $g_f(\varphi)$ — функция и плотность распределения промежутка f.

При статистической обработке данных измерений промежутков получаем функции $G_f(\varphi)$ и $g_f(\varphi)$ в табличной форме. Поэтому воспользоваться выражениями (10) и (11) для нахождения закона распределения t не представляется возможным. Однако можно найти приближенные значения функций $G_t(\tau)$ и $g_t(\tau)$, если заменить интегралы в (10) и (11) суммами

$$G_t(\tau) \approx p_1 G_Y(1/_2\, h\tau) + p_2 G_Y(3/_2\, h\tau) + p_3 G_Y(5/_2\, h\tau) + \ldots \tag{12}$$

$$g_t(\tau) \approx 1/_2\, p_1 h g_Y(1/_2\, h\tau) + 3/_2\, p_2 h g_Y(3/_2\, h\tau) + 5/_2\, p_3 h g_Y(5/_2\, h\tau) + \ldots \tag{13}$$

Здесь $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — относительные частоты f в интервалах $(0, h)$, $(h, 2h)$, $(2h, 3h)$, ...

Выражения (12) и (13) позволяют находить функцию и плотность распределения удельной протяженности периметра пор. В качестве примера ниже приводятся графики функций $g_t(\tau)$ (фиг. 3, *а*) и $G_t(\tau)$ (фиг. 3, *б*), рассчитанных для песка со средним диаметром зерен $d = 0.0436$ *см*. Плотность распределения промежутка $g_f(\varphi)$ (фиг. 4) была найдена по данным измерения 798 промежутков на шлифе песка под микроскопом. Для изготовления шлифа песок был закреплен бальзамом.

Поступило 25 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Гутман. К исследованию фильтрационного переноса в капиллярно-пористых системах. «Инженерно-физ. ж.», 1958, т. I, № 10.
2. Э. М. Гутман. Влияние геометрической структуры на капиллярные свойства дисперсных систем. «Инженерно-физ. ж.», 1958, т. I, № 12.
3. Н. У. Койда. Статистический метод описания структуры неоднородного материала. «Информационный бюллетень по общетехническим вопросам», Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта, Гомель, 1958, № 3.
4. А. Ф. Богомолова, Н. А. Орлова. Количественная характеристика структуры порового пространства. ПМТФ, 1961, № 4.

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР. СЕМИНАРЫ [1]

Общий семинар Института проблем механики под руководством А. Ю. Ишлинского и Г. И. Баренблатта.

Двенадцатое заседание семинара 9 XII 1965 г. **С. К. Годунов** (Москва). *Термодинамика и корректность постановки задач математической физики.*

Известные уравнения для обратимых процессов (уравнения газовой динамики, гидродинамики, электродинамики и др.) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial M_{q_i}}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

где L_{q_i} и M_{q_i} — частные производные некоторых функций L и M искомых переменных $q_1(t, x)$, $q_2(t, x)$, . . . , $q_n(t, x)$ по i-й переменной. Например, для газовой динамики нужно принять

$$q_0 = \frac{1}{T}, \quad q_1 = \frac{u}{T}, \quad q_2 = \frac{E - TS - {}^1\!/_2 u^2}{T}, \quad L = \frac{p}{T}, \quad M = \frac{up}{T}$$

(здесь использованы обычные обозначения). Умножая уравнения (1) на q_i и суммируя по всем i, можно получить равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_{q_i} q_i - L) + \frac{\partial}{\partial x}(M_{q_i} q_i - M) = 0 \tag{2}$$

выражающее некоторый дополнительный закон сохранения.

Именно существование этого закона сохранения является определяющим. Если, например, рассмотреть систему

$$\frac{\partial A_k(u_1, u_2)}{\partial t} + \frac{\partial B_k(u_1, u_2)}{\partial x} = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{3}$$

и потребовать, чтобы после умножения первого уравнения на некоторую функцию $q_1(u_1, u_2)$, второго — на $q_2(u_1, u_2)$ и суммирования получался закон сохранения (обычный способ получения законов сохранения в механике и физике), то это приведет к тому, что в переменных q_1, q_2 система должна иметь вид (1).

Для необратимых процессов имеются соотношения Онзагера, общим выражением которых являются уравнения вида

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial M_{q_i}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_{ik}\frac{\partial q_k}{\partial x}\right) \tag{4}$$

Чтобы уравнения (4) отвечали диссипативному процессу, матрица b_{ik} должна быть положительно определенной, что и предполагается выполненным.

Из указанной записи уравнений вытекает корректность постановки задачи Коши. Для этого нужно, чтобы L была выпуклой функцией, т. е. матрица $L_{q_i q_k}$ была положительно определенной.

---

[1] Подробности о содержании семинаров, отмеченных *, см. журнал «Механика твердого тела», 1966, № 3.