

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВОЙ ДЕВОНСКОЙ НЕФТИ ПРИ ПОНИЖЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

М. Г. АЛИШАЕВ, Г. Г. ВАХИТОВ, М. М. ГЕХТМАН, И. Ф. ГЛУМОВ

(Бугульма)

§ 1. Постановка задачи. Лабораторные исследования фильтрации пластовых девонских нефтей при пониженных температурах показывают, что при малых градиентах давления закон фильтрации Дарси не имеет места.

Обработка экспериментов позволяет высказать гипотезу о существовании минимального градиента давления, ниже которого фильтрация нефти не происходит. Это минимальное значение градиента давления будем называть градиентом сдвига и обозначать буквой τ_0 .

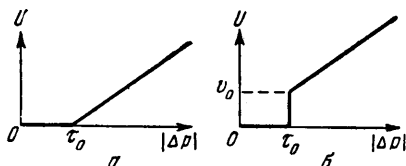
Согласно экспериментальным данным, порядок градиента сдвига составляет 10^{-2} — 10^{-3} атм/м. При градиентах давления, превосходящих градиент сдвига, скорость можно считать зависящей линейно от градиента давления.

В соответствии с результатом экспериментов, закон фильтрации пластовых девонских нефтей при пониженных температурах представим в виде

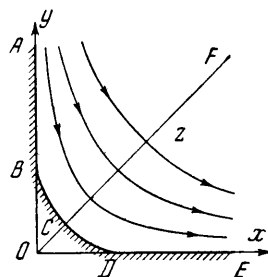
$$v = 0 \text{ при } |\nabla p| \leq \tau_0; \quad v = -\frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_0}{|\nabla p|}\right) \nabla p \text{ при } |\nabla p| > \tau_0 \quad (1.1)$$

где k — проницаемость пласта, μ — вязкость нефти.

При наличии градиента для нестационарных задач характерной является конечная скорость распространения фронта возмущения, а в стационарных задачах — наличие неизвестной границы течения, на которой модуль градиента давления равен градиенту сдвига.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения нелинейной фильтрации были рассмотрены С. А. Христиановичем в работе [1] и приведены к удобной канонической форме. Но решение краевых задач все же затруднительно ввиду нелинейности.

Представляется небезынтересным рассмотрение линейных моделей, которые сохранили бы основные качественные особенности течений (1.1) и давали бы приближенный количественный результат. Будем полагать, что фильтрация следует закону Дарси, начиная с градиента сдвига, а при меньших градиентах фильтрация невозможна. Точнее, закон фильтрации (1.1) заменим законом

$$v = 0 \text{ при } |\nabla p| \leq \tau_0, \quad v = -\frac{k}{\mu} \nabla p \text{ при } |\nabla p| > \tau_0 \quad (1.2)$$

На фиг. 1, а, б изображены соответственно зависимости (1.1) и (1.2).

Заметим, что некоторые авторы [2] склонны полагать, что при малых градиентах давления закон фильтрации представляется кривой, близкой к изображенной на фиг. 1, б. Поэтому рассмотрение краевых задач фильтрации при законе (1.2) представляет и самостоятельный интерес.

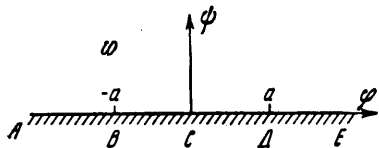
Из (1.2) следует, что модуль скорости фильтрации всегда больше $v_0 = (k/\mu)\tau_0$, являющейся минимальной величиной скорости. Граница течения определяется условием $|v| = v_0$, а в области течения давление удовлетворяет уравнению Лапласа.

Чтобы получить приближенное решение задачи при законе (1.1), модуль скорости в найденном решении следует уменьшить на величину v_0 . При этом граничные условия остаются без изменений, а в уравнении, полученном из уравнения неразрывности, пренебрегается величиной τ_0 . Очевидно, при такой линеаризации сохраняются основные особенности нелинейной задачи. Преимущество такой линеаризации состоит еще и в том, что к краевым задачам фильтрации может быть применен хорошо разработанный в литературе метод Кирхгофа — Жуковского.

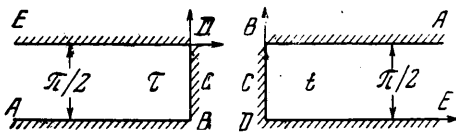
Ниже рассмотрены две модельные задачи — обтекание прямого угла и течение в двухскважинной системе, выясняющие особенности фильтрации при наличии градиента сдвига — образование застойных зон и ограниченность области течения.

§ 2. Обтекание прямого угла. Рассмотрим течение около прямого угла с образованием застойной зоны, изображенное на фиг. 2.

Комплексный потенциал такого течения представляется верхней полуплоскостью $w = \varphi + i\psi$, причем $\psi = 0$ на линии тока $ABCDE$. Ввиду обратимости течения, линии тока симметричны относительно биссектрисы прямого угла CF . Примем $\varphi = 0$ на



Фиг. 3



Фиг. 4

биссектрисе CF , а в точках начала застойной зоны $\varphi_D = -\varphi_B = a$. На фиг. 3 изображена плоскость комплексного потенциала w и нанесены соответствующие точки.

Плоскость годографа скорости

$$\tau = \ln \frac{v_0 dz}{dw} = \ln \frac{v_0}{|v|} + i\theta \tag{2.1}$$

представлена на фиг. 4, а. Конформное отображение плоскости комплексного потенциала на плоскость годографа с соблюдением соответствия точек реализуется формулой

$$\tau = -\frac{1}{2} \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - a^2}}{a} \tag{2.2}$$

Приняв во внимание (2.1), интегрированием при соблюдении соответствия точек получим параметрическую зависимость комплексного потенциала w от z

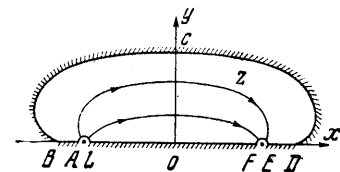
$$w = a \operatorname{ch} 2t, \quad z = \frac{a}{v_0} \left(e^t + \frac{1}{3} e^{-3t} \right) \tag{2.3}$$

Плоскость комплексного переменного t представлена на фиг. 4, б. Предполагая, что на бесконечности потенциал течения, как и в случае обтекания угла при отсутствии застойной зоны, должен быть асимптотически равен cs^2 , из (2.3) находим

$$a = v_0^2 / 2c \tag{2.4}$$

Чтобы получить уравнение границы застойной зоны $B CD$, достаточно в формуле (2.3) положить $t = i\omega$, $0 \leq \omega \leq \pi/2$ и разделить действительные и мнимые части

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0}{2c} \left(\cos \omega + \frac{1}{3} \cos 3\omega \right) \\ y &= \frac{v_0}{2c} \left(\sin \omega - \frac{1}{3} \sin 3\omega \right) \end{aligned} \tag{2.5}$$



Фиг. 5

На фиг. 5 изображена кривая (2.5). Площадь застойной зоны составляет $\pi/6$ (за единицу масштаба принята величина $v_0 / 2c$).

Заметим, что в инженерной практике застойные зоны определяют из условий равенства модуля скорости минимальной скорости v_0 в классическом решении. Для обтекания прямого угла такой застойной зоной будет четверть окружности

$$x^2 + y^2 = (v_0 / 2c)^2 \tag{2.6}$$

причем площадь ее равна $\pi / 4$ (за единицу масштаба снова принята величина $v_0 / 2c$).

При таком же подходе в задачах с градиентом сдвига представления о зонах застоя получаются качественно неверными, количественные результаты могут отличаться (в рассмотренном примере площадь застойной зоны будет завышена на 50%).

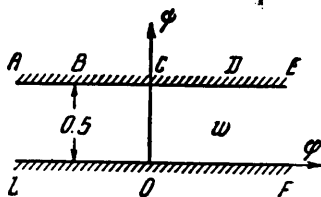
§ 3. Течение в двухскважинной системе. Пусть в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ расположены источник и сток одинаковой интенсивности Q (фиг. 6).

В силу симметрии достаточно рассмотреть лишь течение в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. Этой области течения в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ соответствует полуполоса $-\infty < \varphi < \infty, 0 \leq \psi \leq 0,5 Q$.

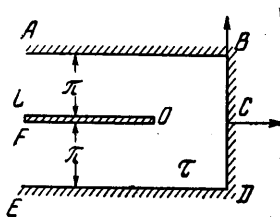
Для удобства выкладок перейдем к безразмерным переменным, отнеся линейные размеры, потенциал и скорость соответственно к масштабам

$$[z] = a, \quad [w] = Q, \quad [v] = Q/a. \quad (3.1)$$

Область течения в плоскости потенциала изобразится тогда полосой $-\infty < \varphi < \infty$, $0 \leq \psi \leq 0.5$. На фиг. 7 изображена эта область и указано соответствие точек. Ввиду



Фиг. 7



Фиг. 8

обратимости течения потенциал на оси OY можно принять равным нулю, а потенциалы в точках B и D равны и противоположны по знаку.

Область течения в плоскости годографа τ изобразится полуполосой с вырезом, соответствующем линии тока LOF , на которой скорость убывает от ∞ до некоторого минимального значения в точке O и затем снова возрастает до бесконечности (фиг. 8).

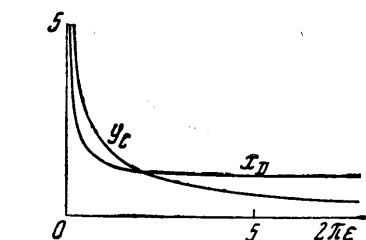
Конформное отображение потенциала w на плоскость годографа τ можно найти, преобразуя полосу (фиг. 7) в полулук и пользуясь затем формулой Кристоффеля — Шварца. При этом оказывается удобным введение вспомогательной четверти плоскости t , представленной на фиг. 9. Решение дается формулами

$$w = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma t^2 - \gamma^{-1}}{1 - t^2}, \quad \tau = \ln \frac{(\gamma t - 1)(1 - t)}{(\gamma t + 1)(1 + t)} \quad (3.2)$$

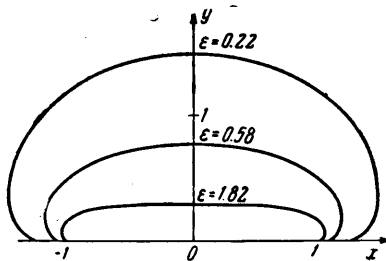
$$z = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left\{ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \ln \frac{\gamma t + 1}{(t + 1)\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\gamma t + 1} - \frac{t}{t + 1} \right\} \quad (3.3)$$

$$2\pi \varepsilon = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^2 \ln \frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma} - 1, \quad [\varepsilon = \frac{av_0}{Q}, \quad \gamma > 1] \quad (3.4)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ найденное решение переходит в классическое, определяющее течение около источника и стока.



Фиг. 9



Фиг. 11

Проследим зависимость размеров зоны течения и контура ее границы от параметра ε . На плоскости t границе области течения соответствует мнимая ось $t = i\omega$, $\omega \geq 0$. Разделив действительные и мнимые части в (3.3), получим уравнение границы

$$x = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \ln \frac{1 + \gamma^2 \omega^2}{\gamma(1 + \omega^2)} + \frac{1 - \gamma^2 \omega^4}{(1 + \omega^2)(1 + \gamma^2 \omega^2)} \right] \quad (3.5)$$

$$y = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(\gamma - 1)\omega}{1 + \gamma \omega^2} - \frac{\gamma \omega}{1 + \gamma^2 \omega^2} - \frac{\omega}{1 + \omega^2} \right]$$

в частности,

$$x_B = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \ln \gamma \right), \quad y_C = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} - \frac{\sqrt{\gamma}}{1 + \gamma} \right) \quad (3.6)$$

Из формул (3.6) следует, что $x_B \approx -1$, $y_C \approx 1/2\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Следовательно, при малых темпах закачки и значительном удалении нагнетательной и эксплуатационной скважин в охлажденных пластах (когда ε будет большим) пара скважин будет создавать конечную зону вытеснения, ширина которой

$$2y_C \approx \frac{Q}{v_0} = \frac{\mu Q}{k\tau_0} \quad (3.7)$$

Если же $\varepsilon \rightarrow \infty$, то имеют место оценки

$$x_B \approx -\frac{2}{3\sqrt{\pi\varepsilon}}, \quad y_C \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi\varepsilon}} \quad (3.8)$$

На фиг. 10 показана зависимость размеров области течения от ε , а на фиг. 11 нанесены контуры границы течения для некоторых значений ε .

Поступило 27 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Христьянович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
2. Березкина Г. М. К вопросу изменения водопроницаемости связных грунтов от градиента напора. Вестн. Моск. ун-та, 1965, № 1.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУКТУРЫ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПО ЕЕ РАЗРЕЗУ

П. Л. АРОН, М. А. БУХБИНДЕР

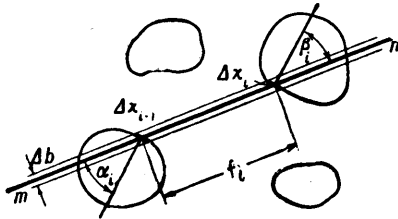
(Кишинев)

При определении свойств пористой среды в качестве геометрической характеристики структуры порового пространства может быть использована удельная протяженность периметра сечений пор в плоском разрезе пористой среды [1, 2].

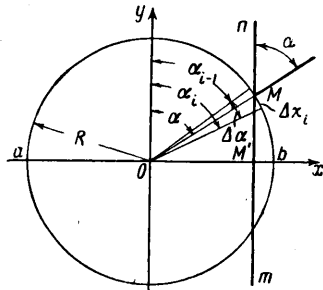
Удельная протяженность периметра пор t измеряется отношением длины χ периметра пор, ограничивающего некоторую область сечения порового пространства, к площади S этой области

$$t = \chi / S \quad (1)$$

Если выбрать площадь S достаточно малой, то при переходе от одной области сечения порового пространства к другой значение t будет меняться. Естественно поэтому рассматривать удельную протяженность периметра пор как функцию двух случайных величин χ и S , связанную зависимостью (1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже делается попытка найти выражения для функции и плотности распределения величины t . Задача решается только для изотропных пористых сред.

Проведем на плоском разрезе (шлифе) пористой среды ряд произвольно ориентированных линий — случайных секущих. Те отрезки секущих, которые окажутся в пределах пор, будем называть «промежутками» и обозначать через f (например, f_i между частицами на фиг. 1). Выделим при каждой секущей полоску шириной Δb , средней линией которой будет случайная секущая. Эти полоски отсекут на границах пор элементы $\Delta \chi$, каждый из которых при достаточно малой величине Δb можно считать частью прямой линии.

Обозначим отрезки границ пор, прилегающие к промежутку f_i , через $\Delta \chi_{i-1}$ и $\Delta \chi_i$, а углы между секущей и нормальными к границам пор в точках пересечения — соответственно через α_i и β_i (фиг. 1). Тогда для i -й полоски можно написать

$$f_i = \frac{\Delta \chi_{i-1} + \Delta \chi_i}{S_i} = \frac{\Delta b \sec \alpha_i + \Delta b \sec \beta_i}{\Delta b f_i} = \frac{\sec \alpha_i + \sec \beta_i}{f_i} \quad (2)$$