Результаты вычислений показывают, что, вообще говоря, следует учитывать слабопроницаемость нижележащего пласта, ибо, как видно из графиков в первом случае, осушение происходит быстрее, чем в случае непроницаемого водоупора. Во втором случае, наоборот, осушение происходит медленнее, в силу восходящего тока.

Однако при очень малых значениях коэффициента фильтрации слабопроницаемого пласта расчеты можно производить без учета перетекания. Действительно, при $\omega_0 < 0.01$ справедливы асимптотические выражения функций Бесселя. Поэтому

$$\frac{1}{b}[1 - F_{(1)}] \approx -\frac{R^2}{2a}\left[\frac{1}{2}(1-\rho_0^2) + \ln \rho_0\right] \qquad (2 - b\nu \ln 2\rho_0)^{-1} \approx \frac{1}{2}$$

учитывая эти соотношения, из формул (2.8), (2.9) можно получить расчетную формулу [1] при непроницаемом водоупоре.

Таким образом, критерием для определения того, следует ли учитывать слабопроницаемость водоупора, будет неравенство $\omega_0 < 0.01$.

В заключение приношу благодарность П. Я. Кочиной за внимание к работе.

Поступило 10 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф., Усенко В. С. Способ расчета систематического вертикального дренажа. Сб.: «Управление поверхностными и подземными водными ресурсами и их использование». Изд-во АН СССР, 1961.
2. Усенко В. С. Неустановившийся приток грунтовых вод к скважинам при наличии инфильтрации с поверхности земли. Моск. ин-т. инж. водн. хоз-ва, Научн. зап., 22, 1960.
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
4. Лейбензон Л. С. Подземная гидрогазодинамика. В кн.: Л. С. Лейбензон. собр. тр., т. 2. Изд-во АН СССР, 1953.

К ЗАДАЧЕ О ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СОВЕРШЕННОМ ДРЕНАЖЕ ПРИ СЛАБОПРОНИЦАЕМОМ ВОДОУПОРЕ

С. Т. РЫБАКОВА, В. Н. ЭМИХ

(*Новосибирск*)

1. Верхний безнапорный горизонт с коэффициентом фильтрации k прорезан горизонтальными дренами до границы со слабопроницаемой прослойкой, мощность которой равна a, а коэффициент фильтрации k_1, и сообщается через последнюю с нижележащим напорным горизонтом, напор H в котором считаем постоянным (фиг. 1). Расстояние между двумя соседними дренами обозначим через $2l$; уровень в обеих дренах считаем пока одинаковым и равным h_l. В выбранной системе координат (фиг. 1) уравнение для ординаты h свободной поверхности при наличии равномерной инфильтрации плотности w имеет в гидравлической постановке следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) - \frac{k_1}{ka}(h - H_1) = 0 \qquad \left(H_1 = H + \frac{wa}{k_1}\right) \tag{1.1}$$

Здесь H_1 — статический уровень в верхнем горизонте.

При решении этой задачи уравнение (1.1) обычно линеаризуют [1]. Между тем, оно допускает точное решение, которое при граничных условиях

$$h = h_0, \quad dh/dx = 0 \qquad \text{при } x = 0 \tag{1.2}$$

имеет следующий вид [2] [1]:

$$l^\circ = {}^1/_2 \sqrt{3}\{[S(h_0^\circ) + R(h_0^\circ)][K(\lambda) - F(\varphi_l, \lambda)] - $$
$$- 2R(h_0^\circ)[E({}^1/_2\pi, \lambda) - E(\varphi_l, \lambda)]\}[R(h_0^\circ)]^{-1/2} \tag{1.3}$$

$$\varphi_l = \arcsin\left(\frac{h_l^\circ - h_2^\circ}{h_0^\circ - h_2^\circ}\right)^{1/2}, \quad \lambda^2 = \frac{h_0^\circ - h_2^\circ}{h_1^\circ - h_2^\circ}, \quad h_{1,2}^\circ = \frac{1}{4}[S(h_0^\circ) \pm R(h_0^\circ)]$$

$$S(h_0^\circ) = 3 - 2h_0^\circ, \qquad R(h_0^\circ) = \sqrt{S(h_0^\circ)(3 + 6h_0^\circ)}$$

$$h_0^\circ = h_0/H_1, \quad h_l^\circ = h_l/H_1, \quad l^\circ = \omega l, \quad \omega = \sqrt{k_1/kaH_1}$$

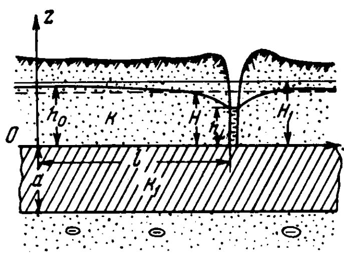
Здесь $F(\varphi, \lambda)$ и $E(\varphi, \lambda)$ — неполные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода; $K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле λ.

2. Непосредственные вычисления по формуле (1.3) при заданных значениях h_0 и h_l осложняются в связи с необходимостью двойного интерполирования табличных значений эллиптических интегралов.

[1] В [2] вместо коэффициента ${}^1/_2\sqrt{3}$ ошибочно содержится коэффициент ${}^1/_2\sqrt{6}$.

Поэтому расчеты по (1.3) удобнее производить при помощи ЭВМ. Можно также численно проинтегрировать уравнение (1.1) при граничных условиях (1.2). Остановимся на втором варианте. Перейдем к безразмерным переменным

$$h^\circ = h / H_1, \quad x^\circ = \omega x \quad (\omega = \sqrt{k_1 / kaH_1}) \tag{2.1}$$



Фиг. 1

В дальнейшем индекс ° сверху опускаем и будем прибегать к нему лишь там, где фигурируют как размерные, так и безразмерные величины. Итак, задача состоит в решении нелинейного уравнения (1.1)

$$(hh')' - (h - 1) = 0 \tag{2.2}$$

в переменных (2.1) (штрихами обозначено дифференцирование по x) при граничных условиях

$$h = h_0, \quad h' = 0 \quad \text{при } x = 0 \tag{2.3}$$

Легко убедиться в четности функции h, являющейся решением задачи (2.2), (2.3). Действительно, сделав в (2.2) замену $x = -x_1$, получим в переменной x_1 такое же уравнение (2.2) при тех же условиях (2.3), и, следовательно, одинаковым значениям x и x_1 соответствуют одинаковые значения h, или, иначе, $h(-x) = h(x)$.

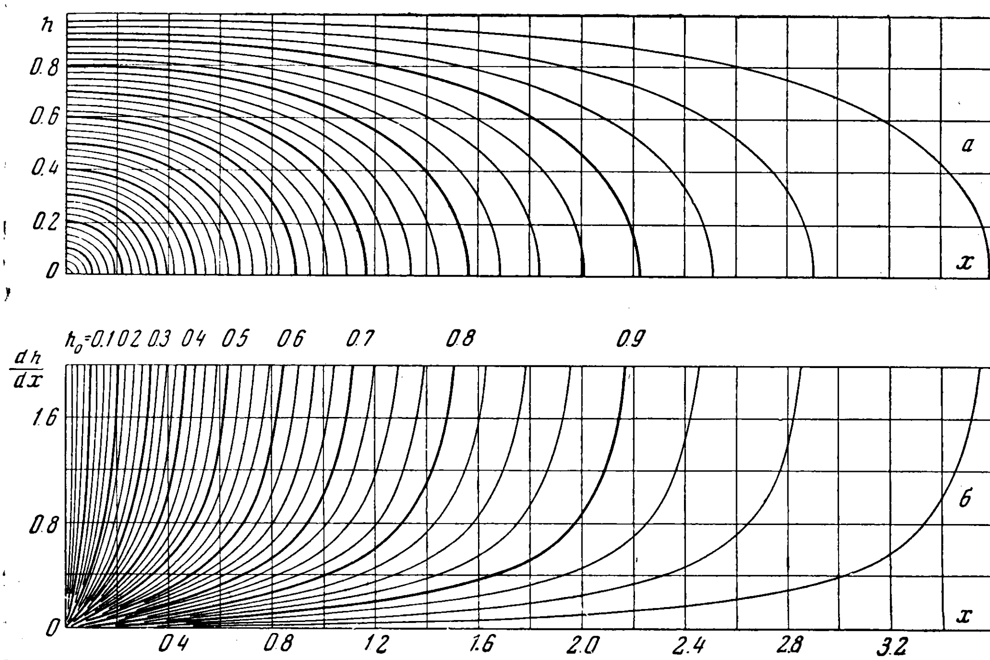
Обозначая $h' = z$, сведем уравнение (2.2) к следующей системе двух уравнений

$$h' = z, \qquad z' = (h - 1 - z^2)h^{-1} \tag{2.4}$$

при условиях

$$h = h_0, \quad z = 0, \quad \text{при } x = 0 \tag{2.5}$$

Интегрирование системы (2.4) при условиях (2.5) осуществлялось численно на ЭВМ методом Рунге — Кутта для значений h_0 от 0.025 до 0.975 через 0.025. В каждом цикле интегрирование с заданным шагом продолжалось до тех значений x, пока значения h оставались положительными: отрицательность значений h, начиная с некоторого $x = l$, при заданном h_0 физически означает, что дрены, отстоящие одна от другой дальше, чем на $2l$, даже при максимально возможном снижении уровня в них, т. е. до $h_l = 0$, не в состоянии обеспечить понижение уровня в середине междренья до величины h_0. Расчеты на ЭВМ были сделаны при условиях (1.2) также по формуле (1.3), представляющей решение уравнения (1.1). При этом с учетом структуры формулы (2.2) задавались некоторые значения h_l, полученные ранее в результате численного интегрирования уравнения (1.1), а соответствующие значения l вычислялись; совпадение с результатами численного интегрирования получилось практически полным.



Фиг. 2

На основе результатов вычислений построены графики ординаты h свободной поверхности (фиг. 2, *а*) и производной h' (фиг. 2, *б*) для всех вышеуказанных значений h_0 при $x \geqslant 0$. Пользуясь графиками для h, можно решать задачи о нахождении каждой из трех величин: уровня h_0 при $x = 0$ (а также при других $x \in [-l, l]$), уровня h_l в дренах и расстояния $2l$ между ними, если заданы две остальные. С использованием же графика для h' можно также определять расход Q каждой из дрен с одной ее стороны на единицу длины по формуле (Q° — безразмерный расход)

$$Q = k\omega H_1^2 Q^\circ = k\omega H_1^2 h_l \, (dh \,/\, dx)_{x=l} \tag{2.6}$$

Заметим, что графики можно использовать также в случае, когда коэффициент фильтрации является кусочно-постоянной функцией x, что соответствует наличию в верхнем горизонте макронеоднородностей. Эти изменения проницаемости будут учтены масштабным коэффициентом ω, при помощи которого по формуле (2.1) производится пересчет безразмерных координат x° в размерные x.

Уровни в обеих дренах предполагаются пока одинаковыми, так что при данном выборе осей координат картина оказывается симметричной относительно оси h. Можно, однако, расширить постановку задачи: пусть уровни в левой и правой дренах с заданным расстоянием L между ними различны и равны соответственно h_1 и h_2. Тогда задача будет состоять в нахождении интегральной кривой уравнения (2.2), проходящей через две заданные точки; начало координат можно выбрать на оси x пока произвольно. Решение этой задачи единственно, причем в некоторой точке междренья ордината свободной поверхности достигает максимума h_0; при этом $h' = 0$. Если перенести начало координат в эту точку, то в новой системе координат искомая интегральная кривая является некоторой интегральной кривой уравнения (2.2) при условиях (2.3), и, следовательно, для ее нахождения можно воспользоваться имеющимися графиками (фиг. 2, *а*). Это можно осуществить следующим путем.

Используя графики фиг. 2, *а*, построим вспомогательный график, по оси абсцисс которого будем откладывать значения h_0, а по оси ординат — сумму $l_1 + l_2$ абсцисс двух точек на соответствующей интегральной кривой, ординаты которых равны h_1 и h_2. Построив таким образом кривую, найдем на ней точку с ординатой L; абсцисса этой точки определит искомое значение h_0. После выделения интегральной кривой определяются (также при помощи графиков) и координаты самих дрен.

Пример. Уровни в дренах от водоупора равны 3 и 3.5 *м*; расстояние между дренами $L = 300$ *м*, коэффициенты фильтрации верхнего горизонта и прослойки равны соответственно 10 и 0,01 *м/сут*; мощность прослойки $a = 2$ *м*; напор в нижележащем горизонте $H = 4$ *м*; интенсивность инфильтрации $w = 0.005$ *м/сут*. Определить уровень в междренье на расстоянии 100 *м* от левой дрены (с меньшим уровнем) и расход каждой из дрен (со стороны междренья).

Решение. Согласно (1.1), статический уровень в верхнем горизонте

$$H_1 = 4\text{м} + \frac{0.005 \text{ м/сут} \cdot 2\text{м}}{0.01 \text{ м/сут}} = 5 \text{ м}$$

Перейдем по формулам (2.1) к безразмерным параметрам. Имеем

$$h_1^\circ = 3 \text{ м} / 5 \text{ м} = 0.6, \qquad h_2^\circ = 3.5 \text{ м}/5 \text{ м} = 0.7, \qquad L^\circ = L\omega = 300 \text{ м} \left(\frac{0.01 \text{ м/сут}}{10 \text{ м/сут} \cdot 2 \text{ м} \cdot 5 \text{ м}}\right)^{1/2} = 3.0$$

Из фиг. 2, *а* видим, что $L^\circ = 2.94$ при $h_0^\circ = 0.875$; $L^\circ = 3.40$ при $h_0^\circ = 0.900$. В результате графической интерполяции находим нужное значение $h_0^\circ = 0.878$. Вновь обращаясь к фиг. 2, *а*, определяем $l_1^\circ = 1.62$ и $l_2^\circ = 1.38$. Таким образом точке, отстоящей от левой дрены на расстоянии 100 *м*, соответствует безразмерная абсцисса $x^\circ = -0.62$. При помощи фиг. 2, *а* находим для кривой с параметром $h_0^\circ = 0.878$ путем интерполяции $h^\circ(-0.62) = h^\circ(0.62) = 0.85$, или, в пересчете на действительные уровни, $0.85 \cdot 5$ *м* $= 4.25$ *м*. Затем по формуле (2.6) определяем расходы Q_- и Q_+ — левой и правой дрен на метр их длины со стороны междренья; при этом используем также фиг. 2, *б*

$$Q_- = k\omega H_1^2 \left(h^\circ \left| \frac{dh^\circ}{dx^\circ} \right|\right)_{x=1.62} = 10 \frac{\text{м}}{\text{сут}} \cdot 0.01 \frac{1}{\text{м}} \cdot 5 \text{ м}^2 \cdot 0.6 \cdot 0.55 = 0.165 \frac{\text{м}^3/\text{сут}}{1 \text{ пог. м}}$$

$$Q_+ = k\omega H_1^2 \left(h^\circ \left| \frac{dh^\circ}{dx} \right|\right)_{x=1.38} = 10 \frac{\text{м}}{\text{сут}} \cdot 0.01 \frac{1}{\text{м}} \cdot 5 \text{ м}^2 \cdot 0.7 \cdot 0.34 = 0.119 \frac{\text{м}^3/\text{сут}}{1 \text{ пог. м}}$$

3. Рассмотрим решения уравнений, получаемых в результате линеаризации уравнения (2.2) по h и h^2.

При линеаризации по h заменим в уравнении (2.2) множитель h при h' некоторым постоянным значением h^*; положим, например, $h^* = h_0$. Тогда уравнение (2.2) перейдет в следующее:

$$h_0 h'' - (h - 1) = 0 \tag{3.1}$$

Решение уравнения (3.1) при условиях (2.3) имеет вид

$$h = 1 - (1 - h_0)\operatorname{ch}(x / \sqrt{h_0}) \tag{3.2}$$

В книге [1] (стр. 216) приведено решение уравнения (3.1) при уровне в дренах

$$h|_{x=\pm l} = h_l \tag{3.3}$$

В принятых обозначениях это решение представляется так:

$$h = 1 - (1 - h_l)\operatorname{ch}(x / \sqrt{h_0}) / \operatorname{ch}(l / \sqrt{h_0}) \tag{3.4}$$

При линеаризации по h^2 второй член левой части уравнения (2.1) умножим на выражение $(h + 1) / 2h^{**}$, где постоянная h^{**} подбирается так, чтобы вся дробь по возможности меньше отличалась от единицы; пусть, например $h^{**} = {}^1/_2\,(h_0 + 1)$.

В результате вместо уравнения (2.2) получим следующее:

$$(h_0 + 1)(h^2)'' - 2(h^2 - 1) = 0 \tag{3.5}$$

При условиях (2.3) решение уравнения (3.5) выглядит так:

$$h^2 = 1 - (1 - h_0^2)\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{{}^1/_2(h_0 + 1)}} \tag{3.6}$$

Если же вместо уровня h_0 в середине междренья известен уровень h в дренах, т. е. вместо условий (2.3) заданы условия (3.3), то решение уравнения (3.5) будет:

$$h^2 = 1 - (1 - h_1^2)\operatorname{ch}[x / \sqrt{{}^1/_2(h_0 + 1)}]\operatorname{sech}[l / \sqrt{{}^1/_2(h_0 + 1)}] \tag{3.7}$$

При указанном выше выборе параметров линеаризации h^* и h^{**} наименьшее расхождение между решениями исходного нелинейного и линеаризованных уравнений имеет место для малых значений x, при которых h мало отличается от h_0.

При линеаризации по h^2 формула (2.6) для расхода запишется с учетом (3.6) так:

$$Q = k\omega H_1^2(1 - h_0)\sqrt{{}^1/_2(1 + h_0)}\operatorname{csch}[l / \sqrt{{}^1/_2(h_0 + 1)}] \tag{3.8}$$

Для вычисления же расхода при линеаризации по h формула (2.6) непригодна, так как $\lim Q = 0$ при $h \to 0$ согласно (2.6): в силу (3.2) производная dh / dx при $h \to 0$ не стремится к ∞, компенсируя убывание h, как это имеет место при линеаризации по h^2 или для нелинейного уравнения. В данном случае, в соответствии с принципом осреднения потока по мощности, положенным в основу линеаризации по h, $Q = k\omega H_1^2 h_0 \,|\, dh / dx\,|_{x=l}$ или, согласно (3.2),

$$Q = k\omega H_1^2(1 - h_0)\sqrt{h_0}\operatorname{sh}(l / \sqrt{h_0}) \tag{3.9}$$

Вновь предположим, что уровни в дренах различны. Возьмем за основу уравнение (3.5), общее решение которого имеет вид

$$h^2 = 1 + C_1\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{{}^1/_2(1 + h_0)}} + C_2\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{{}^1/_2(1 + h_0)}} \tag{3.10}$$

Выделим частное решение, удовлетворяющее условиям

$$h(-l_1) = h_1, \qquad h(l_2) = h_2, \qquad l_1 + l_2 = L \tag{3.11}$$

В качестве начала координат $x = 0$ удобно по-прежнему выбрать точку, в которой уровень достигает максимума h_0. Так как теперь $h'(0) = 0$, то имеем $C_1 = 0$, и выражение (3.1) упрощается, принимая вид (3.6). Однако теперь неизвестны значения величин h_0, l_1 и l_2; дано лишь соотношение между двумя последними: $l_1 + l_2 = L$ (ср. с п. 2). Используя условия (3.11), получим, последовательно полагая в (3.6)

$$x = -l_1,\ h = h_1 \text{ и } x = L - l_1 = l_2,\ h = h_2$$

$$l_1 = \left(\frac{1 + h_0}{2}\right)^{1/2}\operatorname{ar\,ch}\frac{1 - h_1^2}{1 - h_0^2}, \qquad L - l_1 = \left(\frac{1 + h_0}{2}\right)^{1/2} + \operatorname{arch}\frac{1 - h_2^2}{1 - h_0^2} \tag{3.12}$$

Отсюда имеем

$$L = \left(\frac{1 + h_0}{2}\right)^{1/2}\left(\operatorname{arch}\frac{1 - h_1^2}{1 - h_0^2} + \operatorname{arch}\frac{1 - h_2^2}{1 - h_0^2}\right) \tag{3.13}$$

Из соотношения (3.13) подбором или графически находим h_0, после чего по формулам (3.12) определяем положение дрен в преобразованной системе координат.

Пример. Вернемся к задаче, рассмотренной в п. 2 для нелинейного уравнения. Из соотношения (3.13) при выбранных параметрах вычисляем $h_0^\circ = 0.8763$. Затем по формуле (3.6) найдем $h^\circ(-0.62) = 0.847$, т. е. $h = 4.235$ *м* при $x = -62$ *м*. Пользуясь (3.8), имеем $Q_- = 0.1198 \cdot 10$ *м/сут*$\cdot 0.01$ *м*$^{-2} \cdot 5$ *м*$\cdot \operatorname{sh}(1.0324 \cdot 1.62) = 0.1538$ *м*^{3}*/сут / 1 пог. м*, $Q_+ = 0.1173$ *м*^{3}*/сут / 1 пог. м*

Если использовать решение (3.2) уравнения, линеаризованного по h, то для определения h_0 получим следующее соотношение, аналогичное соотношению (3.13):

$$L^\circ = \sqrt{h_0^\circ}\left(\operatorname{ar\,ch}\frac{1-h_1^\circ}{1-h_0^\circ} + \operatorname{ar\,ch}\frac{1-h_2^\circ}{1-h_0^\circ}\right)$$

Отсюда найдем значение $h_0^\circ = 0.8672$. По формулам (3.2) и (3.9) получим

$$h^\circ(-0.62) = 0.836, \quad \text{или} \quad h\,|_{x=-62\,м} = 4.180$$

$$Q_- = 0.1708 \text{ м}^3/\text{сут} / 1 \text{ пог. м}, \qquad Q_+ = 0.1292 \text{ м}^3/\text{сут} / \text{пог. м}$$

Сравнивая результаты вычислений, видим, что при одинаковых граничных условиях (3.11) обе линеаризации дают интегральные кривые, более пологие, чем соответствующая кривая нелинейного уравнения, причем лучшее приближение к последней обеспечивает линеаризация по h^2. Далее, первая линеаризация дает завышенные значения расхода дрен, а вторая — заниженные. Последнее становится понятным, если учесть, что при линеаризации по h^2 значения $|dh/dx|$ на дренах оказываются меньшими, чем при решении нелинейного уравнения, если уровни в дренах в обоих случаях одинаковы.

Если подчинить решения нелинейного и линеаризованных уравнений одинаковым условиям (2.3), то путем исследования поведения разности между этими решениями при $x \geqslant 0$ можно показать, что интегральные кривые уравнения, линеаризованного по h, лежат выше соответствующих кривых уравнения, линеаризованного по h^2; последние, в свою очередь, лежат выше соответствующих кривых нелинейного уравнения. В отношении же расходов обе линеаризации дают заниженные значения расходов, причем лучшее приближение дает линеаризация по h.

Для представления о расположении интегральных кривых при одинаковых условиях (2.3) в таблице приведены значения h, h_2 и h_1 согласно формулам (2.2), (3.6) и (3.2). Из этой таблицы видно, что расхождение между кривыми становится тем ощутимее, чем меньше отношение h/h_0. Особенно большую погрешность дает при этом линеаризация по h; линеаризация по h^2 оказывается значительно лучшей. В статье [2] по этому пункту было сделано противоположное заключение. Это объясняется тем, что ранее при линеаризации по h^2 принималось $h^{**} = h_0$; при этом дробь $(h+1)/2h_0$, на которую множится второй член уравнения (2.2), может оказаться гораздо больше единицы, особенно для малых h и при малых значениях x, когда $h \approx h_0$ и линеаризация будет грубой.

$h_0 = 0.5$

x	0.5	0.6	0.67	0.68	0.93
h	0.346	0.241	0.076	—	—
h_2	0.349	0.250	0.119	0.082	—
h_1	0.370	0.309	0.258	0.250	0.002

$h_0 = 0.7$

	0.5	0.8	1.0	1.16	1.19	1.59
h	0.642	0.531	0.386	0.088	—	—
h_2	0.643	0.535	0.399	0.174	0.053	—
h_1	0.645	0.552	0.459	0.362	0.342	0.009

$h_0 = 0.9$

x	0.5	1.0	2.0	2.23	2.28	2,83
h	0.886	0.837	0.473	0.032	—	—
h_2	0.886	0.837	0.498	0.233	0.073	—
h_1	0.886	0.839	0.582	0.471	0.443	0.010

Соотношение между расходами проиллюстрируем на следующем примере. Пусть $h_0 = 0.9$. Тогда приведенный расход $Q^\circ = Q/k\omega H_1^2$, подсчитанный для нелинейного уравнения по формуле (2.6), с использованием результатов численного интегрирования при линеаризации по h — по формуле (3.9), при линеаризации по h^2 — по формуле (3.8), имеет соответственно следующие значения:

$$Q^\circ = 0.1200,\ 0.1196,\ 0.1185 \text{ при } x^\circ = 1; \qquad Q^\circ = 0.4136,\ 0.3847,\ 0.3731 \text{ при } x^\circ = 2;$$

Авторы благодарят П. Я. Полубаринову-Кочину за советы при выполнении работы.

Поступило 20 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионат В. А. Расчет горизонтального дренажа в неоднородных грунтах (под ред. проф. С. Ф. Аверьянова). Таллин, 1962.
2. Эмих В. Н. О горизонтальных дренах в слоистых грунтах. ПМТФ, 1962, № 4.