# К РАСЧЕТУ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ДРЕНАЖА

А. БЕГМАТОВ *(Новосибирск)*

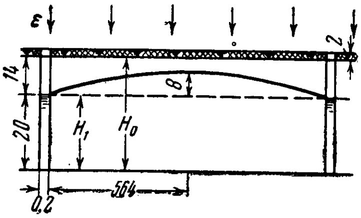
В имеющихся исследованиях вертикального дренажа (например [1, 2]) постоянная интенсивность инфильтрации действует в течение всего года. Так как инфильтрация возникает вследствие орошения или питания атмосферными водами, то она действует в определенные сезоны года, а не весь год.

Выясним, как будут изменяться элементы движения при наличии полива и при отсутствии его, а также вопрос о том, насколько оправдано рассмотрение интенсивности инфильтрации как функции, непрерывно действующей в течение всего года.

**1. Учет периодичности поливов.** Уравнение осесимметричной фильтрации в этом случае имеет вид (фиг. 1)

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = a\Delta h + W(t), \qquad \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}$$

$$a = \frac{kT}{\mu}, \qquad W(t) = \frac{1}{\mu}\varepsilon(t) \tag{1.1}$$




Фиг. 1

Здесь $k$, $\mu$ — коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунта, $T$ — некоторое среднее значение мощности потока грунтовых вод, $\varepsilon(t)$ — интенсивность инфильтрационного питания.

Рассмотрим уравнение (1.1) при следующих граничных и начальном условиях

$$h(r, 0) = H_0, \qquad h(r_0, t) = H_1, \qquad (\partial h / \partial r)_{r=R} = 0 \tag{1.2}$$

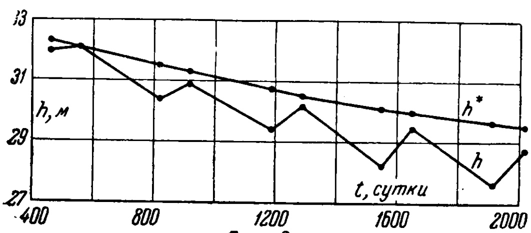
Пусть интенсивность инфильтрационного питания будет

$$\varepsilon(t) = \mu W(t) = \mu \sum_1^m W_{2i-1}[\delta(t - t_{2i-1}) - \delta(t - t_{2i})], \qquad \delta(t - t_i) = \begin{cases} 0 & (t < t_i) \\ 1 & (t > t_i) \end{cases}$$

Здесь $W_{2i-1}$ — заданные постоянные. Полагая

$$U = h - H_1 - \int_0^t W(t)\, dt \tag{1.3}$$

вместо уравнения (1.1), а также граничных и начального условий (1.2) будем иметь




Фиг. 2

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\Delta U \tag{1.4}$$

$$U(r, 0) = H_0 - H_1$$

$$U(r_0, t) = -\int_0^t W(t)\, dt$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=R} = 0 \tag{1.5}$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{R}, \qquad \rho_0 = \frac{r_0}{R}, \qquad \tau = \frac{t}{\nu} = \frac{kT}{\mu R^2} t$$

Тогда, воспользовавшись известными методами решения осесимметричных задач теплопроводности (см., например, [3]), после ряда вычислений получим решение уравнения (1.4) в следующем виде:

$$U(\rho, \tau) = -\pi(H_0 - H_1)\vartheta - \pi\frac{R^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\alpha_n^2}\sum_{i=2}^{m} W_{2i-3}\{\exp[-\alpha_n^2(\tau - \tau_{2(i-1)})] -$$

$$- \exp[-\alpha_n^2(\tau - \tau_{2i-3})]\} - \sum_2^m W_{2i-3}(\tau_{2(i-1)} - \tau_{2i-3}) - W_{2m-1}(\tau - \tau_{2m-1}) -$$

$$- W_{2m-1}\pi\frac{R^2}{a}\sum_1^{\infty}\frac{A_n}{\alpha_n^2}\{1 - \exp[-\alpha_n^2(\tau - \tau_{2m-1})]\} \qquad (\tau_{2m-1} < \tau < \tau_{2m})$$

Аналогично можно получить формулу и для $\tau > \tau_{2m}$. При этом

$$\vartheta = \sum_{1}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n^2 \tau), \qquad A_n = \frac{J_0(\alpha_n \rho) J_1(\alpha_n) V(\alpha_n \rho)}{J_0^2(\alpha_n \rho_0) - J_1^2(\alpha_n)}$$
$$V(\alpha_n \rho) = J_0(\alpha_n \rho) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n \rho) \tag{1.6}$$

Здесь $J_0$, $J_1$ — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка от действительного аргумента; $Y_0$, $Y_1$ — функция Бесселя второго рода нулевого и первого порядка от действительного аргумента, $\alpha_n$ — корни уравнения $V(\alpha_n \rho_0) = 0$. Корни этого уравнения находятся графически [4].

Возвращаясь к функции $h(\rho, \tau)$, окончательно получим из (1.3)

$$h(\rho, \tau) = H_1 - \pi (H_0 - H_1) \vartheta - \pi \frac{R^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2} \sum_{i=2}^{m} W_{2i-3} \{\exp[-\alpha_n^2 (\tau - \tau_{2(i-1)}) -$$
$$- \exp[-\alpha_n^2 (\tau - \tau_{2i-3})]\} - \pi \frac{R^2}{a} W_{2m-1} \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2} \{1 - \exp[-\alpha_n^2 (\tau - \tau_{2m-1})]\}$$
$$(\tau_{2m-1} < \tau < \tau_{2m}) \tag{1.7}$$

Обычно наи олее важным является определение уровня грунтовых вод на границе потока при достаточно больших значениях времени. Принимая во внимание приближенные соотношения, аналогичные [1]

$$-\pi\vartheta = \exp(-\alpha_1^2 \tau), \qquad \rho = 1, \qquad \tau > 0.2$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \rho_0) J_1(\alpha_n)}{\alpha_n^3 (J_0^2(\alpha_n \rho_0) - J_1^2(\alpha_n))} \exp[-\alpha_n^2 (\tau - \tau_{2(i-1)})] =$$
$$= -\frac{1}{4} \left[\ln \rho_0 + \frac{1}{2}(1 - \rho_0^2)\right] \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2(i-1)})], \qquad \tau - \tau_{2(i-1)} > 0.2$$

для определения положения грунтовых вод на границе потока имеем:

$$h(1, \tau) = H_1 + (H_0 - H_1) \exp(-\alpha_1^2 \tau) - \frac{R^2}{2a} \left[\ln \rho_0 + \frac{1}{2}(1 - \rho_0^2)\right] \times$$
$$\times \left[\sum_{2}^{m} W_{2i-3} \{\exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2(i-1)})] - \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2i-3})]\} + \right.$$
$$\left. + W_{2m-1} \{1 - \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2m-1})]\}\right] \qquad (\tau_{2m-1} < \tau < \tau_{2m}) \tag{1.8}$$

Здесь и в дальнейшем [1]

$$\alpha_1^{-2} = -{}^1/_2 \ln 2\rho_0 \tag{1.9}$$

Теперь определим дебит скважины по формуле

$$Q = 2\pi k T \left(\rho \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}$$

где производная берется из выражения (1.7). Аналогично [1] нетрудно получить

$$Q = \frac{2\pi k T (H_1 - H_0)}{\ln 2\rho_0} e^{-\alpha_1^2 \tau} + \pi R^2 \mu \sum_{2}^{m} W_{2i-3} \{\exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2(i-1)})] -$$
$$- \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2i-3})]\} + \pi R^2 \mu W_{2m-1} \{1 - \exp[-\alpha_1^2 (\tau - \tau_{2m-1})]\}$$
$$(\tau_{2m-1} < \tau < \tau_{2m}) \tag{1.10}$$

В случае, когда $(\tau - \tau_{2i-3}) > 0.2$, для определения уровня грунтовых вод необходимо пользоваться (1.7). Нетрудно вычислить дебит скважины и для этого случая.

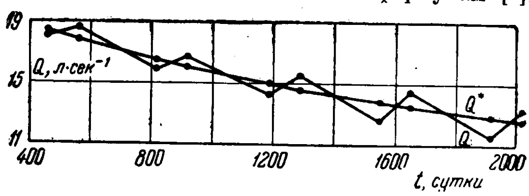
Рассмотрим пример при $W = W_1 = W_3 = \ldots = W_{2m-1} = \varepsilon / \mu$.

Положим $t_1 = 100$ *сут.*, $t_2 = 200$ *сут.*, $t_3 = 465$ *сут.*, $t_4 = 565$ *сут.* и т. д., т. е. орошение производится в течение 100 суток в год. Исследовать работу систематического вертикального дренажа при условиях $Q_p = 9000$ *м*$^3$*га*$^{-1}$*год*$^{-1}$, $R = 564$ *м*, $k = 5$ *м / сут.*, $\mu = 0.2$, $r_0 = 0.2$ *м*, $H_0 = 34$ *м*, $H_1 = 20$ *м*. Здесь $Q_p$ — норма орошения.

По наблюдениям на оросительных системах около $^2/_3$ подаваемой на орошение воды тратится на транспирацию и испарение с поверхности почвы. Если принять это положение, то на поверхность грунтового потока попадает количество жидкости $^1/_3 Q_p$ и получим

$$W = \frac{3000}{0.2}\ \frac{м^3}{га \cdot год} = \frac{3000\ м/сут}{0.2 \cdot 10\,000 \cdot 100} = 0.015\ м/сут$$

По результатам расчетов по формулам (1.8), (1.10) построены графики фиг. 2, 3. Считалось, что поливной сезон равен 100 суткам, формулы для бесполивного сезона для каждого года опущены. $h^*$, $Q^*$ вычислены по формулам работы [1]. Сравнивая результаты, полученные по приведенным расчетным формулам и по формулам [1], можно сделать следующее заключение. Для получения сведений об осушительном действии вертикального дренажа намного лет можно пользоваться расчетными формулами из [1] при среднем инфильтрационном питании, которое происходит в течение всего года, так как полученные при этом понижения меньше, чем понижения, полученные по нашим формулам. При работе вертикального дренажа с целью осушения пласта желательно иметь сведения о положении уровня грунтовых вод с некоторым запасом.



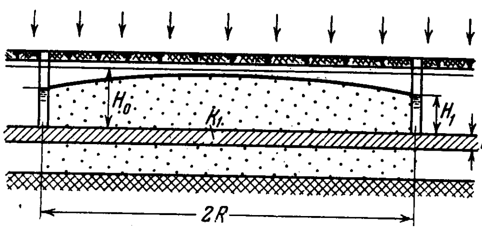

Фиг. 3

Для определения положения уровня грунтовых вод в конце поливного сезона или в конце бесполивного сезона вычисления следует производить по формулам, полученным в настоящей работе.

2. Работа систематического вертикального дренажа с учетом слабой проницаемости водоупора. В этом случае уравнение для определения свободной поверхности имеет вид (2.1)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\Delta h - b(h - H) + \frac{\varepsilon}{\mu}$$

$$b = \frac{k_1}{\mu T_1}, \qquad \varepsilon = \mathrm{const}$$




Фиг. 4

Здесь $k_1$, $T_1$ — коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемого пласта соответственно, $H$ — постоянный напор в нижележащем пласте, а остальные обозначения прежние.

Решим уравнение (2.1) при граничных и начальном условиях (фиг. 4)

$$h(r, 0) = H_0, \qquad h(r_0, t) = H_1 \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=R} = 0 \tag{2.2}$$

Аналогично предыдущему случаю получим

$$h(\rho, \tau) = H_1 - \pi (H_0 - H_1)\, \vartheta e^{-b\nu\tau} -$$
$$- \pi b \left(H - H_1 + \frac{\varepsilon}{\mu b}\right) \sum_1^\infty \frac{A_n}{b + \alpha_n^2 / \nu} \{1 - \exp[-b\nu + \alpha_n^2)\tau]\}$$

Решение $h(\rho)$ уравнения (2.1) при $\partial h / \partial t = 0$ для установившегося движения имеет вид

$$h(\rho) = H + \varepsilon / \mu b - (H - H_1 + \varepsilon / \mu b) F(\rho) \tag{2.3}$$

$$F(\rho) = \frac{I_1(\omega_0) K_0(\omega_0\rho) + I_0(\omega_0\rho) K_1(\omega_0)}{I_1(\omega_0) K_0(\omega_0\rho_0) + I_0(\omega_0\rho_0) K_1(\omega_0)} \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{b}{a} R^2\right) \tag{2.4}$$

Здесь $K_0$, $I_0$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка, а $K_1$, $I_1$ — первого порядка от мнимого аргумента. Учитывая, что

$$h(\rho) = [h(\rho, \tau)]_{\tau \to \infty} \tag{2.5}$$

получим окончательно выражение решения уравнения (2.1) в виде:

$$h = H + \frac{\varepsilon}{\mu b} - \pi (H_0 - H_1)\, \vartheta \exp(-b\tau\nu) - \left(H - H_1 + \frac{\varepsilon}{\mu b}\right) \times$$
$$\times \left\{F(\rho) - \pi b \sum_1^\infty \frac{A_n}{b + \alpha_n^2 / \nu} \exp[-(b\nu + \alpha_n^2)\tau]\right\} \tag{2.6}$$

Принимая во внимание равенство (2.5), нетрудно убедиться, что решение (2.6) уравнения (2.1) удовлетворяет граничным и начальному условиям (2.2). Из уравнения (2.6) при $b = 0$ следует решение задачи без учета проницаемости водоупора [2], так как легко получить следующие предельные соотношения:

$$\lim_{b\to 0} F(\rho) = 1, \qquad \lim_{b\to 0} \frac{1 - F(\rho)}{b} = \frac{R^2}{2a}\left[\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2}(\rho_0^2 - \rho^2)\right] \tag{2.7}$$

Пользуясь приближенными соотношениями, аналогичными [1] для определения положения грунтовых вод на границе потока, имеем следующее уравнение:

$$\tau = \frac{\ln 2\rho_0}{b\nu\ln 2\rho_0 - 2}\ln\frac{H_0 - H_1 - (H - H_1 + \varepsilon/\mu b)[1 - F(1)]}{h(1,\tau) + (H - H_1 + \varepsilon/\mu b)F(1) - H - \varepsilon/\mu b} \tag{2.8}$$

По этой формуле можно определить время сработки уровня грунтовых вод на границе потока. Отсюда, в частности, при $b = 0$ получается расчетная формула [1], если подставить соотношения (2.7) при $\rho = 1$.

Определим дебит скважины. По тем же соображениям, что и выше, при $\tau > 0.2$ можем положить

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{F(\rho) - \pi b\sum_1^\infty \frac{A_n}{b + \alpha_n^2/\nu}\exp[-(b\nu + \alpha_n^2)\tau]\right\}_{\rho=\rho_0} \approx F'(\rho_0)\{1 - \exp[-(b\nu + \alpha_1^2)\tau]\}$$

$$F'(\rho_0) = \omega_0\frac{K_1(\omega_0)I_1(\omega_0\rho_0) - K_1(\omega_0\rho_0)I_1(\omega_0)}{I_1(\omega_0)K_0(\omega_0\rho_0) + K_1(\omega_0)I_0(\omega_0\rho_0)}$$

Нетрудно убедиться, что

$$-2\pi RkT\rho_0\lim_{b\to 0}(H - H_1 + \varepsilon/\mu b)F'(\rho_0) = \pi R^2\varepsilon(1 - \rho_0^2) = Q^\circ$$

где $Q^\circ$ — расход инфильтрационного питания. Аналогично случаю непроницаемого водоупора обозначим

$$Q^\circ = -2\pi RkT\rho_0(H - H_1 + \varepsilon/\mu b)F'(\rho_0)$$

Тогда с учетом (2.8) выражение для дебита получим в виде:

$$Q = Q^\circ + (Q_0 - Q^\circ)\frac{h(1,\tau) + (H - H_1 + \varepsilon/\mu b)F_{(1)} - H - \varepsilon/\mu b}{H_0 - H_1 + (H - H_1 + \varepsilon/\mu b)[F_{(1)} - 1]} \tag{2.9}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi kT(H_1 - H_0)}{\ln 2\rho_0}$$

Приведем пример расчета. Исследовать действие вертикального дренажа, систематически размещенного на орошаемой территории, при следующих данных:

$$H_0 = 34\ м,\ H_1 = 20\ м,\ Q_p = 9000\ м^3га^{-1}год^{-1},\ k = 5\ м\ сут^{-1}$$
$$k_1 = 10^{-3}\ м/сут,\ \mu = 0.2,\ r_0 = 0.2\ м,\ T_1 = 10\ м,\ R = 564\ м$$

Рассмотрим два случая.

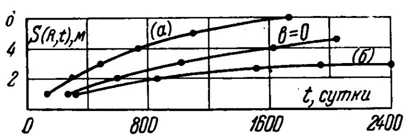
а) До начала откачки пласты находятся в равновесии $H + q/\mu_0 b = 25.8$ м. По формулам (2.8), (2.9) находим

$$t = 1959\lg\frac{6.9\ м}{h(R,t) - 27.1\ м}\ сут,\qquad Q = 10.5\frac{л}{сек} + 1.6[h(R,t) - 27.1\ м]\frac{л}{м сек}$$

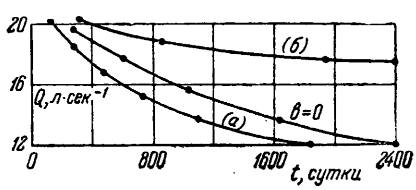
б) До начала откачки существует перепад давлений $H = H_0 = 34$ м. Аналогично случаю а)

$$t = 1912\lg\frac{3.1\ м}{h(R,t) - 30.9\ м}\ сут,\qquad Q = 17.2\frac{л}{сек} + 1.4[h(R,t) - 30.9\ м]\frac{л}{м сек}$$

По результатам вычислений для обоих случаев построены графики фиг. 5, 6. Здесь $S(R,t) = H_0 - h(R,t)$.




Фиг. 5




Фиг. 6

Результаты вычислений показывают, что, вообще говоря, следует учитывать слабопроницаемость нижележащего пласта, ибо, как видно из графиков в первом случае, осушение происходит быстрее, чем в случае непроницаемого водоупора. Во втором случае, наоборот, осушение происходит медленнее, в силу восходящего тока.

Однако при очень малых значениях коэффициента фильтрации слабопроницаемого пласта расчеты можно производить без учета перетекания. Действительно, при $\omega_0 < 0.01$ справедливы асимптотические выражения функций Бесселя. Поэтому

$$\frac{1}{b}[1-F_{(1)}] \approx -\frac{R^2}{2a}\left[\frac{1}{2}(1-\rho_0^2)+\ln\rho_0\right] \qquad (2-b\nu\ln 2\rho_0)^{-1} \approx \frac{1}{2}$$

учитывая эти соотношения, из формул (2.8), (2.9) можно получить расчетную формулу [1] при непроницаемом водоупоре.

Таким образом, критерием для определения того, следует ли учитывать слабопроницаемость водоупора, будет неравенство $\omega_0 < 0.01$.

В заключение приношу благодарность П. Я. Кочиной за внимание к работе.

Поступило 10 IV 1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф., Усенко В. С. Способ расчета систематического вертикального дренажа. Сб.: «Управление поверхностными и подземными водными ресурсами и их использование». Изд-во АН СССР, 1961.
2. Усенко В. С. Неустановившийся приток грунтовых вод к скважинам при наличии инфильтрации с поверхности земли. Моск. ин-т. инж. водн. хоз-ва, Научн. зап., 22, 1960.
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
4. Лейбензон Л. С. Подземная гидрогазодинамика. В кн.: Л. С. Лейбензон. собр. тр., т. 2. Изд-во АН СССР, 1953.

# К ЗАДАЧЕ О ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СОВЕРШЕННОМ ДРЕНАЖЕ ПРИ СЛАБОПРОНИЦАЕМОМ ВОДОУПОРЕ

С. Т. РЫБАКОВА, В. Н. ЭМИХ

(*Новосибирск*)

1. Верхний безнапорный горизонт с коэффициентом фильтрации $k$ прорезан горизонтальными дренами до границы со слабопроницаемой прослойкой, мощность которой равна $a$, а коэффициент фильтрации $k_1$, и сообщается через последнюю с нижележащим напорным горизонтом, напор $H$ в котором считаем постоянным (фиг. 1). Расстояние между двумя соседними дренами обозначим через $2l$; уровень в обеих дренах считаем пока одинаковым и равным $h_l$. В выбранной системе координат (фиг. 1) уравнение для ординаты $h$ свободной поверхности при наличии равномерной инфильтрации плотности $w$ имеет в гидравлической постановке следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right)-\frac{k_1}{ka}(h-H_1)=0 \qquad \left(H_1=H+\frac{wa}{k_1}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $H_1$ — статический уровень в верхнем горизонте.

При решении этой задачи уравнение (1.1) обычно линеаризуют [1]. Между тем, оно допускает точное решение, которое при граничных условиях

$$h=h_0,\ dh/dx=0 \qquad \text{при } x=0 \tag{1.2}$$

имеет следующий вид [2] [1]:

$$\begin{gathered} l^\circ = {}^1/_2\sqrt{3}\,\{[S(h_0^\circ)+R(h_0^\circ)]\,[K(\lambda)-F(\varphi_l,\lambda)]- \\ -2R(h_0^\circ)\,[E({}^1/_2\pi,\lambda)-E(\varphi_l,\lambda)]\}\,[R(h_0^\circ)]^{-1/2} \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\varphi_l=\arcsin\left(\frac{h_l^\circ-h_2^\circ}{h_0^\circ-h_2^\circ}\right)^{1/2}, \quad \lambda^2=\frac{h_0^\circ-h_2^\circ}{h_1^\circ-h_2^\circ}, \quad h_{1,2}^\circ=\frac{1}{4}[S(h_0^\circ)\pm R(h_0^\circ)]$$

$$S(h_0^\circ)=3-2h_0^\circ, \qquad R(h_0^\circ)=\sqrt{S(h_0^\circ)(3+6h_0^\circ)}$$

$$h_0^\circ=h_0/H_1, \quad h_l^\circ=h_l/H_1, \quad l^\circ=\omega l, \quad \omega=\sqrt{k_1/kaH_1}$$

Здесь $F(\varphi,\lambda)$ и $E(\varphi,\lambda)$ — неполные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода; $K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода при модуле $\lambda$.

2. Непосредственные вычисления по формуле (1.3) при заданных значениях $h_0$ и $h_l$ осложняются в связи с необходимостью двойного интерполирования табличных значений эллиптических интегралов.

[1] В [2] вместо коэффициента ${}^1/_2\sqrt{3}$ ошибочно содержится коэффициент ${}^1/_2\sqrt{6}$.