r \ fm	φ	χ 10⁻¹	ψ 10⁻²	ω 10⁻³
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1619	0.3305	0.4335	+0.3492
2	0.2983	0.5251	0.5176	+0.1905
3	0.4153	0.6310	0.4825	+0.0474
4	0.5178	0.6858	0.4173	—0.0271
5	0.6095	0.7088	0.3547	—0.0527
6	0.6940	0.7116	0.3047	—0.0498
7	0.7754	0.7007	0.2710	—0.0382
8	0.8597	0.6791	0.2255	—0.0125
9	0.9609	0.6448	0.1863	+0.0112
10	∞	0.5740	0.1338	+0.0356

Построены графики $\xi(\theta)$ для $\tau = 0.49$, 1.00, 4.00, 9.00. Проведены вычисления решения, линеаризированного в левой и правой точках уравнений для $\tau = 1$ и $\tau = 9$.

Результаты представлены на фиг. 2, где сплошные линии изображают решение методом Филипа, а штриховые — среднее арифметическое линеаризаций в левой и правой точках, штрихпунктирные — решение при линеаризации в правой точке.

Сопоставление кривых говорит о том, что удержание первых двух членов ряда, получаемого при линеаризации уравнения движения влаги в грунте методом малого параметра, дает довольно грубое приближение, для улучшения которого необходимо привлекать следующие члены разложения. При этом вопрос о сходимости упомянутого ряда был и остается открытым.

Авторы выражают благодарность П. Я. Кочиной за обсуждение работы.

Поступило 21 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Swartzendruber D. Unsaturated flow of soil moisture. Trans. Am. Geophys. Union, 1963, v. 44, No 2.
2. Scott E. J. and Hanks R. J. Solution of the One-dimensional Diffusion Equation for Exponentiol and Linear Diffusivity Functions by Power Series Applied to Moisture Flow in Soils. Soil Science, 1962, v. 94, No 5, p. 314—322.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. Докл. АН СССР, 1948, т. 63, № 6.
4. Кулабухова И. И., Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившейся фильтрации при неполной насыщенности грунта. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
5. Philip L. R. Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration — dependent. II. Australian Journal of Physics. 1957, v. 10, No 1.
6. Аверьянов С. Ф. Зависимость водопроницаемости почво-грунтов от содержания в них воздуха. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 2.
7. Маделунг. Математический аппарат физики. Госиздат, 1961, стр. 57.

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ УДАЛЕННОЙ ОБЛАСТИ ПИТАНИЯ

М. А. САТТАРОВ

(*Новосибирск*)

1. При исследовании неустановившихся движений грунтовых вод в однородном пласте на непроницаемом водоупоре приходят к нелинейному дифференциальному уравнению Буссинеска

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \qquad \left(\alpha = \frac{k}{\mu}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $h(x, t)$ — искомый напор рассматриваемого пласта, k — коэффициент фильтрации пласта, μ — эффективная пористость грунта.

П. Я. Полубариновой-Кочиной это уравнение решено применительно к задаче о притоке воды к горизонтальной галерее при внезапном изменении уровня воды в ней [2]. При решении более сложных задач обычно уравнение (1.1) линеаризуют [1]. При втором способе линеаризации оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \qquad \left(a = \frac{kh^\circ}{\mu}\right) \tag{1.2}$$

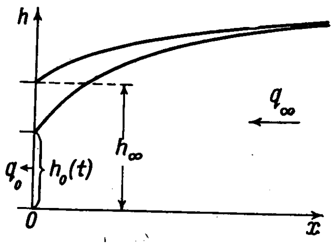
Здесь h° — некоторое среднее значение h.

Ниже исследуется приток грунтовых вод в полубесконечном безнапорном пласте к галерее с постоянным дебитом, когда имеется очень отдаленная область питания, обеспечивающая расход q_∞ на единицу ширины пласта. Предполагается (фиг. 1), что $h = h_{00}$ при $x = 0,\ t = 0$

$$q(x, t) = \frac{k}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x} \tag{1.3}$$

Если уравнение (12), умноженное на $^1/_2\, k$, продифференцировать по x, то с учетом (13) получим дифференциальное уравнение для q с начальными и граничными условиями (в соответствии с вышеизложенным)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \qquad q(x, 0) = q_\infty = \text{const} \qquad q(0, t) = q_0 = \text{const}, \qquad q(\infty, t) = q_\infty \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Решением задачи (1.4) будет функция

$$q(x, t) = q_0 - (q_0 - q_\infty)\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{at}}$$

$$\left(\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi\right) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и интегрируя по x от 0 до x, получим

$$h^2(x, t) = \frac{2q_0}{k}x - \frac{2(q_0 - q_\infty)}{k}\left[x \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)\right)\right] + h_0^2(t) \tag{1.6}$$

Для определения $h_0^2(t)$ подставим (1.6) в (1.2) и, полагая $x = 0$, найдем

$$\frac{\partial h_0^2(t)}{\partial t} = -\frac{2(q_0 - q_\infty)\sqrt{a}}{k\sqrt{\pi t}}$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия $h(0, 0) = h_{00}$, получим

$$h_0^2(t) = h_{00}^2 - \frac{4(q_0 - q_\infty)}{k\sqrt{\pi}}\sqrt{at}, \quad \text{или} \quad h^2(0, \tau) = 1 - (A_0 - A_\infty)\sqrt{\tau} \tag{1.7}$$

Здесь безразмерные величины определяются формулами

$$\tau = \frac{at}{h_{00}^2}, \qquad A_0 = \frac{4q_0}{kh_{00}\sqrt{\pi}}, \qquad A_\infty = \frac{4q_\infty}{kh_{00}\sqrt{\pi}}, \qquad h^\circ(0, \tau) = \frac{h_0(t)}{h_{00}}$$

Пользуясь (1.7), нетрудно определить момент времени $\tau = \tau^{(1)}$, когда $h_0(t)$ достигает заданного значения αh_{00}, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\tau^{(1)} = \frac{(1 - \alpha^2)^2}{(A_0 - A_\infty)^2}$$

Предположим теперь, что откачка ведется непостоянным дебитом, но меняется ступенчатым образом, что можно записать в виде

$$q(0, t) = q_0 + \sum_{i=1}^{N}(q_i - q_{i-1})\sigma_1(t - t_i), \qquad \sigma_1(t - t_i) = \begin{cases} 0 & (t < t_i) \\ 1 & (t \geqslant t_i) \end{cases}$$

Тогда в промежутке $\tau_N < \tau < \tau_{N+1}$ для $h(0, \tau)$ получим

$$h^2(0, \tau) = 1 - (A_0 - A_\infty)\sqrt{\tau} - \sum_{i=1}^{N}(A_i - A_{i-1})\sqrt{\tau - \tau_i}$$

$$\left(A_i = \frac{4q_i}{kh_{00}\sqrt{\pi}}, \quad \tau_i = \frac{at_i}{h_{00}^2}\right) \tag{1.8}$$

В частности, предположим, что при $\tau_1 < \tau < \tau_2$ скважины не работают, т. е. $A_1 = 0$. Тогда для этого промежутка времени будет

$$h^2(0, \tau) = 1 - (A_0 - A_\infty)\sqrt{\tau} + A_0\sqrt{\tau - \tau_1} \tag{1.9}$$

Полагая здесь $\tau = \tau_2$, получим h^2 для τ_2.

Можно поставить вопрос, для какого значения τ_2 уровень воды в скважинах поднимается до первоначальной величины h_{00}? В этот момент $h(0, \tau_2) = 1$, поэтому будем иметь

$$\tau = \frac{A_0^2 \tau_1}{A_\infty (2A_0 - A_\infty)} = \frac{q_0^2 \tau_1}{q_\infty (2q_0 - q_\infty)}$$

Отсюда $\tau \to \infty$ при $q_\infty \to 0$, т. е. при отсутствии питания полное восстановление уровня может произойти лишь через очень большой промежуток времени.

Продолжительность восстановления уровня после прекращения откачек обозначим через τ_{b1}, она выражается так:

$$\tau_{b1} = \tau_2 - \tau_1 = \frac{(q_0 - q_\infty)^2 \tau_1}{q_\infty (2q_0 - q_\infty)} \tag{1.10}$$

Величина τ_{b1} может быть как большей, так и меньшей τ_1, в зависимости от отношения $\beta = q_\infty / q_0$. При $\beta = 0.293$ имеем $\tau_{b1} = \tau_1$, при $\beta > 0.293$ будет $\tau_{b1} < \tau_1$, при $\beta < 0.293$ τ_{b1} / τ_1 быстро возрастает.

Если в момент τ_2 возобновляется откачка с дебитом q_0, то для $\tau > \tau_2$ будем иметь

$$h^2(0, \tau) = 1 - (A_0 - A_\infty)\sqrt{\tau} + A_0\sqrt{\tau - \tau_1} - A_0\sqrt{\tau - \tau_2}$$

и можно производить дальнейшие вычисления, например, момента τ_3, когда будет $h(0, \tau_3) = h(0, \tau_1)$ и, далее, найти $\tau = \tau_4$, при котором уровень $h(0, \tau_4) = 1$.

2. Рассмотрим задачу о выборе дебита скважины при заданном q_∞, чтобы восстановление первоначального уровня произошло через $2n$ шагов ($h(0, \tau) = 1$), когда продолжительности времени откачек и восстановления известные величины, а соответствующие дебиты скважины в предыдущих шагах последовательно определены. Исследуем простейший случай. Предположим, что при восстановлении откачка отключается, т. е. в формуле (1.8) положим $A_1 = A_3 = \ldots = A_{2n-1} \doteq 0$. Тогда для $q(0, \tau)$ получим

$$h^2(0, \tau) = 1 + A_\infty \sqrt{\tau} - \sum_{i=1}^{n} A_{2i-2}\left(\sqrt{\tau - \tau_{2i-2}} - \sqrt{\tau - \tau_{2i-1}}\right) \quad (\tau_0 = 0) \tag{2.1}$$

Это при условии $h(0, \tau_{2n}) = 1$ можно представить в виде

$$A_\infty \sqrt{\tau_{2n}} = S(n), \qquad S(n) = \sum_{i=1}^{n} A_{2i-2}\left(\sqrt{\tau_{2n} - \tau_{2i-2}} - \sqrt{\tau_{2n} - \tau_{2i-1}}\right) \tag{2.2}$$

По предположению все A_{2i-4} определены. Тогда из формулы (1.10) для A_{2n-2} нетрудно получить

$$\frac{A_\infty}{A_{2n-2}} = \frac{q_\infty}{q_{n-2}} = \frac{\sqrt{\tau_{2n} - \tau_{2n-2}} - \sqrt{\tau_{2n} - \tau_{2n-1}}}{\sqrt{\tau_{2n}} - S(n-1)/A_\infty} \tag{2.3}$$

Время τ_{2n}, прошедшее от начала работы скважин до начала $(n+1)$-й откачки, можно записать еще так:

$$\tau_{2n} = \sum_{i=1}^{n} (\tau_{0i} + \tau_{bi}) = \tau_{01} \sum_{i=0}^{2n-1} l_i \quad (l_{2i-2} = \tau_{0i}/\tau_{01},\ l_{2i-1} = \tau_{bi}/\tau_{01},\ l_0 = 1) \tag{2.4}$$

Здесь τ_{0i} — время i-й откачки, τ_{bi} — время i-го восстановления.

В этих обозначениях из (2.3) имеем

$$\frac{q_\infty}{q_{2n-2}} = \left(\sqrt{l_{2n-2} + l_{2n-1}} - \sqrt{l_{2n-1}}\right)\left\{\left(\sum_{i=0}^{2n-1} l_i\right)^{1/2} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{2i-2}}{q_\infty}\left[\left(\sum_{k=2i-2}^{2n-1} l_k\right)^{1/2} - \left(\sum_{k=2i-1}^{2n-1} l_k\right)^{1/2}\right]\right\}^{-1} \tag{2.5}$$

Если продолжительность восстановления в m раз больше, чем продолжительность откачки, т. е. если $l_{2i-2} = 1$ и $l_{2i-1} = m$, то

$$\frac{q_\infty}{q_{2n-2}} = \left(\sqrt{1+m} - \sqrt{m}\right)\left\{\sqrt{n(1+m)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{2i-2}}{q_\infty}\left(\sqrt{(n-i)(1+m) + 1 + m} - \sqrt{(n-i)(1+m) + m}\right)\right\}^{-1} \tag{2.6}$$

Определим теперь значение $q_\infty / q_{2n-2} = \beta_{2n-2}$ при бесконечном увеличении числа откачек и восстановлений ($n \to \infty$) по формуле (2.6). Очевидно, при $q_{2n-2} \leqslant q_\infty$ уровень воды в галерее находится не ниже первоначальной высоты h_{00}. Поэтому нас будет интересовать случай $q_\infty < q_{2n-2} < \infty$ или $\beta_{2n-2} < 1$. Из последнего вытекает, что при $n \to \infty$ правая сторона формулы (2.6) тоже должна быть ограниченной величиной. Это значит, что знаменатель

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n(1+m)} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\beta_{2i-2}}\left(\sqrt{(n-i)(1+m)+1+m} - \sqrt{(n-i)(1+m)+m}\right)\right\} = C < \infty \tag{2.7}$$

Расчеты показывают, что β_{2n-2} с возрастанием n монотонно возрастает, но с другой стороны, она ограничена ($\beta_{2n-2} < 1$). Обозначим ее предельное значение через β_∞ и, заменяя все β_{2i-2}, через β_∞ в сумме формулы (2.7) выносим ее из-под суммы. Дальше добавляя и отнимая в сумме формулы (2.7) величину $\sqrt{1+m} - \sqrt{m}$ и вводя нумерацию $n - i = k$, перепишем сумму в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(1+m)+1+m} + \sqrt{k(1+m)+m}} - \frac{1}{\sqrt{1+m}+\sqrt{m}} \equiv S^*(n-1) - \frac{1}{\sqrt{1+m}+\sqrt{m}} \tag{2.8}$$

Очевидно, имеют место неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k(1+m)+1+m}} < S^*(n-1) < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k(1+m)+m}}$$

Для больших n можно написать

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k(1+m)+1+m}} > \int_0^n \frac{dk}{2\sqrt{k(1+m)+1+m}} = \frac{\sqrt{n(1+m)+1+m} - \sqrt{1+m}}{1+m}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{k(1+m)+m}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{m}} + \int_0^n \frac{dk}{2\sqrt{k(1+m)+m}} = \frac{\sqrt{n(1+m)+m} - \sqrt{m}}{1+m} + \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+m)}}S^*(n-1) = \frac{1}{1+m} \tag{2.9}$$

Переходя к пределу в формуле (2.7) и учитывая (2.8) и (2.9), получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(1+m)}\left[1 - \frac{1}{\beta_\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+m)}}S^*(n-1)\right] + \frac{1}{\beta_\infty}\frac{1}{\sqrt{1+m}+\sqrt{m}} = C_1$$

что выполняется при

$$\beta_\infty(1+m) = 1 \tag{2.10}$$

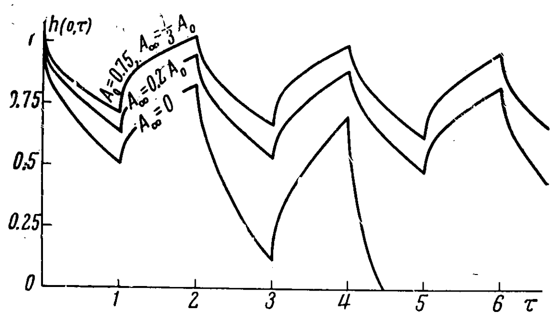
Следовательно, из (2.10) получим для дебита скважины

$$q = (1+m)\,q_\infty \tag{2.11}$$

Полученный результат показывает, что если продолжительность восстановления больше, чем продолжительность откачки, в m раз, то при бесконечном числе откачек и восстановлений дебит скважины можно принять в $1 + m$ раз большим, чем q_∞, и при этом после каждой откачки уровень успевает восстановиться.

На поливных участках, когда моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots$ выбираются по условиям орошения при постоянном дебите скважины, полное восстановление часто не успевает происходить.

В качестве простейшего примера примем $\tau_{2n} = 2n\tau_{01}$, будем считать продолжительности периодов откачек и периодов восстановлений уровней одинаковыми и равными τ_{01} (например, 12 *час* идет откачка, 12 *час* скважины не работают). На фиг. 2 представлен ряд кривых для $h(0, \tau)$ при различных значениях A_0 и A_∞. Из фигуры видно, что при отсутствии питания линия максимальных значений уровня неуклонно понижается. При $A_\infty \neq 0$ на график, отвечающий случаю $A_\infty = 0$, нужно наложить кривую $Y = A_\infty \sqrt{\tau}$.

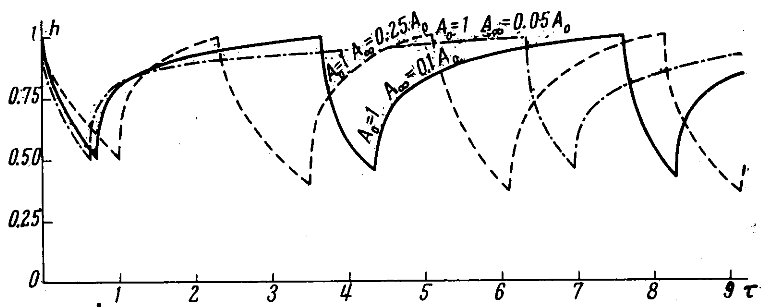


Фиг. 2

3. Представляет интерес следующая задача: при заданных значениях q_∞ / q_{2n-2} и времени откачек определить время, затраченное на восстановление первоначального уровня h_{00} через $2n$ шагов, если в предыдущих шагах соответствующие времена восстановлений последовательно определены. Рассмотрим случай $q_0 = q_2 = \ldots = q_{2n-2}$ и пусть $l_{2i-2} = 1$. Тогда для l_{2n-1} получим уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{n+\alpha_1+l_{2n-1}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(n-i)+\alpha_i+l_{2n-1}} - \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{(n-i)+\alpha_{i+1}+l_{2n-1}}\right) = 1-\frac{q_\infty}{q_0} \qquad \left(\alpha_i = \sum_{k=i}^{n-1} l_{2k-1}\right) \tag{3.1}$$

На фиг. 3 приведены кривые при различных значениях A_0 и A_∞.



Фиг. 3

Из фигуры видно, что чем меньше A_∞, тем больше время полного восстановления, однако оно стремится к конечному пределу, определяемому по формуле

$$l = (q_0 / q_\infty) - 1$$

которая получается из (3.1) так же, как это делалось выше.

Автор благодарит П. Я. Полубаринову-Кочину за предложение темы этой работы и за оказанную помощь в ходе ее выполнения.

Поступило 20 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. О дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехтеориздат, 1952.
3. Бочевер Ф. М. Неустановившийся приток грунтовых вод к линейному ряду скважин в артезианских бассейнах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.