

К ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НЕПОЛНОЙ НАСЫЩЕННОСТИ ГРУНТА

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ, С. Т. РЫБАКОВА

(Новосибирск)

Предполагая выполнение обобщенного закона Дарси и пренебрегая движением воздуха в порах, задачу о движении влаги в почве сводят¹ к интегрированию нелинейного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \quad (1)$$

где k и p — функции только θ , или, записывая в несколько ином виде²,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad \left(D = D(\theta) = k \frac{d\psi}{d\theta}; \quad \psi = \psi(\theta) \right) \quad (2)$$

Здесь ψ — капиллярный потенциал, θ — влажность.

Таким образом, распространение влаги трактуется как некоторый диффузионный процесс с коэффициентом диффузии, зависящим от концентрации диффундирующего вещества. Зависимости $D(\theta)$ и $k(\theta)$ от влажности до сих пор представляют собой тему исследования теоретических и экспериментальных работ. Почвы, для которых $D(\theta) = \alpha \exp(\beta\theta)$ (здесь α и β — параметры, характеризующие почву), называют почвами типа Гарднера [2].

В работе [2] приводится решение уравнения (2) для горизонтального течения (когда второй член в правой части (2) отсутствует) с $D(\theta)$ в виде экспоненциальной или линейной функции θ . Автомодельное решение искалось в виде степенного ряда, при этом краевая задача на полупрямой сводилась к задаче Коши. Такой прием был применен П. Я. Полубариновой-Кочиной [3] в 1948 г. для подобного уравнения. Авторами работы [2] найдены 24 члена ряда и отмечено, что полученный ряд имеет конечный радиус сходимости.

Так как зависимость $D(\theta)$ фактически гораздо сложнее и дается зачастую экспериментальными кривыми, то приходится уравнение (2) решать численно.

Некоторые приближенные решения рассматриваемой проблемы получены методом линеаризации при помощи малого параметра [4]. Сущность метода сводится к тому, что кривые $D(\theta)$ и $k(\theta)$ заменяются отрезками касательных, проведенных в левой точке (назовем это линеаризацией в левой точке). С таким же успехом можно было бы проводить линеаризацию в правой точке. По-видимому, лучшее приближение получим, взяв среднее между двумя линеаризованными решениями, или проводя линеаризацию в некоторой средней точке (что не одно и то же). Очевидно, линеаризация будет тем лучше, чем меньше область изменения θ . Ниже делается попытка выяснить степень этого приближения на уравнении (2) при условиях

$$\theta = \theta_n, \quad t = 0, \quad z > 0; \quad \theta = \theta_0, \quad z = 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

где θ_0 и θ_n — заданные постоянные, а D и k заимствованы у С. Ф. Аверьянова [6]

$$k(\theta) = k_1 \left(\frac{\theta - \theta^*}{\sigma - \theta^*} \right)^{3.5}, \quad D(\theta) = k(\theta) \frac{p'(\theta)}{\gamma} \quad \left(\frac{p(\theta)}{\gamma} = - \frac{p_0 \theta^*}{\gamma \theta} \frac{1 - (\theta/\theta_1)^3}{1 - (\theta^*/\theta_1)^3} \right) \quad (4)$$

Здесь θ^* — связанная влага, σ — пористость, θ_1 — полная влагоемкость, p_0 — давление при θ^* , k_1 — коэффициент фильтрации при полном насыщении. Представим $D(\theta)$ и $k(\theta)$ в виде

$$k(\theta) = M f_1(\theta), \quad D(\theta) = M N f_1(\theta) f_2'(\theta), \quad f_1(\theta) = (\theta - \theta^*)^{3.5} \\ M = \frac{k_1}{(\sigma - \theta^*)^{3.5}}, \quad N = \frac{p_0 \theta^*}{\gamma [1 - (\theta^*/\theta_1)^3]}, \quad f_2(\theta) = - \frac{1}{\theta} \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_1} \right)^3 \right]$$

Введем безразмерные время и длину по формулам

$$\xi = z/N, \quad \tau = M t/N$$

придем к задаче

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[f_1(\theta) f_2'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] - f_1'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (5)$$

$$\theta = \theta_n, \quad \tau = 0, \quad \xi > 0; \quad \theta = \theta_0, \quad \xi = 0, \quad \tau \geq 0$$

¹ Некоторый обзор новейших исследований за рубежом содержится в [1].

² Здесь речь будет идти об одномерном движении.

Здесь $\operatorname{inv} \operatorname{erf} cx$ — функция, обратная к $\operatorname{erf} cx$. Таким образом,

$$J_{n-1/2}^+ = \frac{\Phi_{n-1}}{2} + 2(D_{n-1/2}^0)^{1/2} \frac{i \operatorname{erf} c [1/2 \Phi_{n-1} (D_{n-1/2}^0)^{1/2}]}{\operatorname{erf} c [1/2 \Phi_{n-1} (D_{n-1/2}^0)^{1/2}]} \quad \left(i \operatorname{erf} c x = \int_x^\infty \operatorname{erfc} \xi d\xi \right)$$

или

$$J_{n-1/2}^+ = \frac{\Phi_{n-1}}{2} + \frac{2D_{n-1/2}^0}{\Phi_{n-1}} A \left[\frac{\Phi_{n-1}}{2(D_{n-1/2}^0)^{1/2}} \right] \quad \left(A(x) = \frac{2x \exp(-x^2)}{\pi^{1/2} \operatorname{erfc} x} - 2x^2 \right) \quad (14)$$

Для $A(x)$ приводится асимптотическое выражение для больших x и таблица для $x = 0$ (0.2) 1 (0.5) 4 (1.0) 10. Вычисления Φ_r производятся итерациями, связанными с заданием некоторого значения $J_{1/2}$, использованием поочередно (12), (13), вычислением $J_{n-1/2}^*$ и сравнении его с $J_{n-1/2}^+$.

Поправки к $J_{1/2}$ вводят до тех пор, пока Δ не будет мало

$$\Delta = J_{n-1/2}^* - J_{n-1/2}^+, \quad (J_{1/2(i+1)} = J_{1/2i})^{-1/2} \Delta$$

Аналогично, вводя аппроксимацию

$$\int_{\theta_r}^{\theta_{r+1/2}} f d\theta = -\frac{1}{4} (f_{r+1} + 3f_r) \frac{\delta\theta}{2} \quad (15)$$

получим формулы

$$J_{r+1/2} = J_{r-1/2} - f_r, \quad f_{r+1} = f_r - \frac{\beta_{r+1/2} / \delta\theta + J_{r+1/2}}{\alpha_{r+1/2}^0 / \delta\theta^2 - 1/8} \quad (16)$$

$$J_{r+1/2} = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_r} f d\theta - \frac{1}{2} f_r, \quad \alpha_{r+1/2}^0 = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r} \alpha d\theta$$

Вычислительные процедуры проводятся методом проб: задаемся $J_{1/2}' = 0$, $f_0 = 0$ и, используя поочередно формулы (16), вычисляем f_r' и J_n' , где

$$J_n = J_{n-1/2} - 1/2 f_n$$

Затем полагаем

$$J_{1/2}'' = -1, \quad f_0 = 0, \quad \beta_{r+1/2} = 0 \quad (r = 0, \dots, n)$$

и находим f_r'' и J_n'' . Полученные величины f_r и J_n — линейные функции $J_{1/2}$,

$$J_n' = C + DJ_{1/2}', \quad J_n'' = DJ_{1/2}''$$

Так как $J_{1/2}' = 0$, $J_{1/2}'' = -1$, то $C = J_n'$, $D = -J_n''$. Таким образом

$$J_n = J_n' - J_n'' J_{1/2}$$

Положим $J_n = 0$; это эквивалентно требованию равенства среднего по площади от f в промежутке (θ_n, θ_{n-1}) среднему арифметическому от значений f на концах промежутка, т. е.

$$\frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} f d\theta = \frac{1}{2} (f_n + f_{n-1})$$

Отсюда $J_{1/2} = J_n' / J_n''$, и для f_2 получаем

$$f_r = f_r' - f_{1/2} f_r''$$

Как показывают вычисления, существенным элементом в получении f_r является табулирование функции $\alpha(\theta)$, куда в качестве множителя входит $d\theta/d\Phi$.

Трудности возникают в точке $\theta = \theta_{n-1/2}$. Вместо предлагаемого Филиппом пути можно воспользоваться следующим. Из (10) имеем

$$\left(\frac{d\theta}{d\Phi} \right)_{n-1/2} = -\frac{1}{2D_{n-1/2}} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \Phi d\theta$$

Кроме того,

$$J_{n-1/2}^+ = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} \varphi d\theta - \frac{\varphi_{n-1}}{2}$$

$$\int_{\theta_n}^{\theta_{n-1}} \varphi d\theta = \delta\theta J_{n-1/2}^+ + \varphi_{n-1} \frac{\delta\theta}{2} = \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta + \int_{\theta_{n-1/2}}^{\theta_{n-1}} \varphi d\theta = \int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta + \varphi_{n-1} \frac{\delta\theta}{2}$$

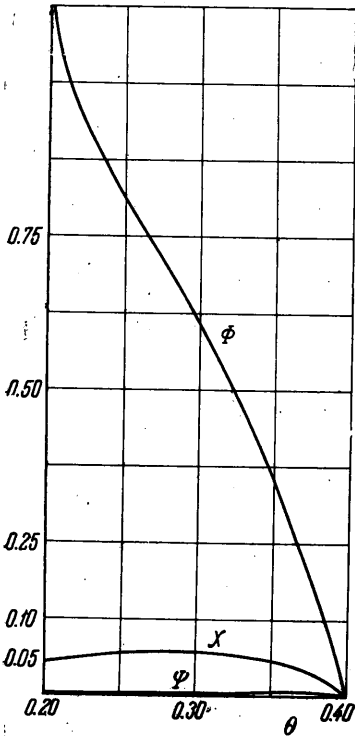
Отсюда

$$\int_{\theta_n}^{\theta_{n-1/2}} \varphi d\theta = \delta\theta J_{n-1/2}^+, \quad \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)_{n-1/2} = -\frac{\delta\theta J_{n-1/2}^+}{2D_{n-1/2}}$$

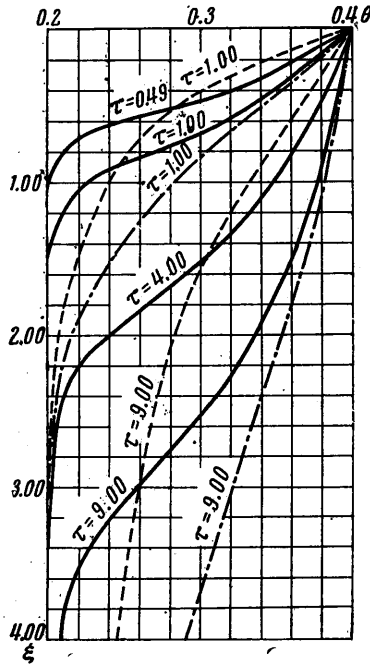
Описанным методом проводилось численное решение задачи (5) с

$$\theta_n = 0.2, \quad \theta_0 = \sigma = 0_1 = 0.4, \quad \theta^* = 0.04$$

Выбор $\theta_n = 0.2$ был сделан из тех соображений, что для малых значений θ_n ,



Фиг. 1



Фиг. 2

как отмечается в [1], перестает быть справедливым обобщенный закон Дарси, и в уравнении (2) будет

$$D = D(\theta, \partial\theta / \partial x)$$

Кроме того, принимая большой диапазон изменения θ , нужно ожидать еще больших расхождений решения нелинейного уравнения с линеаризованным.

Шаг $\delta\theta = 0.02$, $n = 10$. Вычислены $\varphi_r, \chi_r, \psi_r, \omega_2$ (таблица, фиг. 1). Получена быстрая сходимость функций f_m к нулю. Из (7)

$$\xi = \varphi(\theta) \tau^{1/2} + \chi(\theta) \tau + \psi(\theta) \tau^{3/2} + \omega(\theta) \tau^2$$

r	fm	φ	$\times 10^{-1}$	$\psi 10^{-2}$	$\omega 10^{-2}$
0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1		0.1619	0.3305	0.4335	+0.3492
2		0.2983	0.5251	0.5176	+0.1905
3		0.4153	0.6310	0.4825	+0.0474
4		0.5178	0.6858	0.4173	-0.0271
5		0.6095	0.7088	0.3547	-0.0527
6		0.6940	0.7116	0.3047	-0.0498
7		0.7754	0.7007	0.2710	-0.0382
8		0.8597	0.6791	0.2255	-0.0125
9		0.9609	0.6448	0.1863	+0.0112
10	∞		0.5740	0.1338	+0.0356

Построены графики $\xi(\theta)$ для $\tau = 0.49, 1.00, 4.00, 9.00$. Проведены вычисления решения, линейризованного в левой и правой точках уравнений для $\tau = 1$ и $\tau = 9$.

Результаты представлены на фиг. 2, где сплошные линии изображают решение методом Филина, а штриховые — среднее арифметическое линейризации в левой и правой точках, штрихпунктирные — решение при линейризации в правой точке.

Сопоставление кривых говорит о том, что удержание первых двух членов ряда, получаемого при линейризации

уравнения движения влаги в грунте методом малого параметра, дает довольно грубое приближение, для улучшения которого необходимо привлекать следующие члены разложения. При этом вопрос о сходимости упомянутого ряда был и остается открытым.

Авторы выражают благодарность П. Я. Кочинной за обсуждение работы.

Поступило 21 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Swartzen druber D. Unsaturated flow of soil moisture. Trans. Am. Geophys. Union, 1963, v. 44, No 2.
2. Scott E. J. and Hank s R. J. Solution of the One-dimensional Diffusion Equation for Exponential and Linear Diffusivity Functions by Power Series Applied to Moisture Flow in Soils. Soil Science, 1962, v. 94, No 5, p. 314—322.
3. Полубаринова - Кочина П. Я. Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. Докл. АН СССР, 1948, т. 63, № 6.
4. Кулабухова И. И., Полубаринова - Кочина П. Я. О неустановившейся фильтрации при неполной насыщенности грунта. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
5. Philip L. R. Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration — dependent. II. Australian Journal of Physics. 1957, v. 10, No 1.
6. Аверьянов С. Ф. Зависимость водопроницаемости почво-грунтов от содержания в них воздуха. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 2.
7. Маделунг. Математический аппарат физики. Госиздат, 1961, стр. 57.

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ УДАЛЕННОЙ ОБЛАСТИ ПИТАНИЯ

М. А. САТТАРОВ

(Новосибирск)

1. При исследовании неустановившихся движений грунтовых вод в однородном пласте на непроницаемом водоупоре приходят к нелинейному дифференциальному уравнению Буссинеска

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad \left(\alpha = \frac{k}{\mu} \right) \quad (1.1)$$

Здесь $h(x, t)$ — искомый напор рассматриваемого пласта, k — коэффициент фильтрации пласта, μ — эффективная пористость грунта.

П. Я. Полубариновой-Кочинной это уравнение решено применительно к задаче о притоке воды к горизонтальной галерее при внезапном изменении уровня воды в ней [2]. При решении более сложных задач обычно уравнение (1.1) линейризуют [1]. При втором способе линейризации оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad \left(a = \frac{kh^0}{\mu} \right) \quad (1.2)$$

Здесь h^0 — некоторое среднее значение h .