

## НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ОТКАЧКЕ ИЗ СКВАЖИНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ БЕЗНАПОРНОМ ПОТОКЕ

В. М. ШЕСТАКОВ

(Москва)

В несколько упрощенной постановке [1,2] напоры  $H$  фильтрационного потока вблизи скважины, располагаемой в неограниченном безнапорном потоке (фиг. 1), описываются уравнением Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

при линеаризированном условии на свободной поверхности

$$\frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad c = \frac{k}{\mu} \quad (2)$$

причем для упрощения задачи допускается выполнение условия (2) не на подвижной свободной поверхности, а на плоскости начального уровня воды ( $z = 0$ ).

В такой постановке В. К. Беляковой [2] получено решение для случая точечного стока с постоянной интенсивностью  $q$ , действующего, начиная с момента  $t = 0$ , на глубине  $h$  под начальным уровнем воды; согласно этому решению понижение напора в любой точке определяется уравнением

$$S = \frac{Q}{2\pi k} \left[ \frac{1}{2 \sqrt{r^2 + (z + h^0)^2}} + \frac{1}{2 \sqrt{r^2 + (z - h^0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - h^0 - ct)^2}} \right] \quad (3)$$

Понижение уровня свободной поверхности  $S_0$  определяется из (3) при  $z = 0$

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi k} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^0^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (h^0 + ct)^2}} \right] \quad (4)$$

а понижение  $S_0^0$  уровня воды над скважиной будет

$$S_0^0 = \frac{Q}{2\pi k} \frac{ct}{h^0 (h^0 + ct)} \quad (5)$$

Аналогичное решение для скважины, расположенной в интервале  $z = h$  и  $z = h + l$ , получается обычным путем, когда скважина заменяется стоком линейной интенсивностью  $q = Q/l$  и понижение  $S$  в любой точке определится интегралом

$$\begin{aligned} S &= \frac{Q}{2\pi kl} \int_h^{h+l} \left[ \frac{1}{2 \sqrt{r^2 + (z_0 - z)^2}} + \frac{1}{2 \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z_0 + z + ct)^2}} \right] dz = \\ &= \frac{Q}{4\pi kl} \left[ \operatorname{ar sh} \frac{h+l-z}{r} - \operatorname{ar sh} \frac{h-z}{r} + \operatorname{ar sh} \frac{h+l+z}{r} - \operatorname{ar sh} \frac{h+z}{r} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{ar sh} \frac{h+l+z+ct}{r} + 2 \operatorname{ar sh} \frac{h+z+ct}{r} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

Понижения  $S_0$  уровня свободной поверхности получим из (6) при  $z = 0$

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi kl} \left[ \operatorname{ar sh} \frac{h+l}{r} - \operatorname{ar sh} \frac{h}{r} - \operatorname{ar sh} \frac{h+l+ct}{r} + \operatorname{ar sh} \frac{h+ct}{r} \right] \quad (7)$$

причем в случае  $r \ll h$

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi kl} \left( \ln \frac{h+l}{h} - \ln \frac{h+l+ct}{h+ct} \right) \quad (8)$$

Понижение уровня воды в скважине  $S_e$  определим как среднее значение понижения на поверхности скважины  $S|_{r=r_0}$ , т. е.

$$S^0 = \frac{1}{l} \int_h^{h+l} S|_{r=r_0} dz$$

Проведя интегрирование, получим

$$S^{\circ} = S^{\circ\circ} - \frac{Q}{2\pi kl} \left[ 2 \ln \frac{2(h+l) + ct}{2h+l+ct} - \frac{2h+ct}{l} \ln \frac{(2h+l+ct)^2}{(2h+ct)(2h+2l+ct)} \right] \quad (9)$$

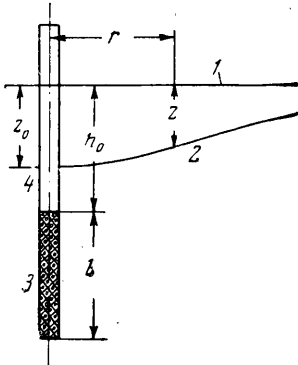
Здесь  $S^{\circ\circ}$  — предельное понижение] уровня в скважине, определяемое по формуле

$$S^{\circ\circ} = \frac{Q}{2\pi kl_s} \left[ \ln \frac{1,47l}{r^{\circ}} + \ln \frac{h+l}{2h+l_s} + \frac{h}{l} \ln \frac{4h(h+l)}{(2h+l)^2} \right] \quad (10)$$

Сопоставление зависимостей, составленных для точечного и линейного стоков, показывает их хорошее согласование, если добиться совпадения значений понижений, получаемых в том и другом случаях при достижении предельного стационарного состояния. Так, сопоставляя значения понижений  $S_0$ , определяемых при малых значениях  $r$ , по уравнениям (5) и (8) найдем, что при  $t \rightarrow \infty$  они дают совпадающие результаты, если задать

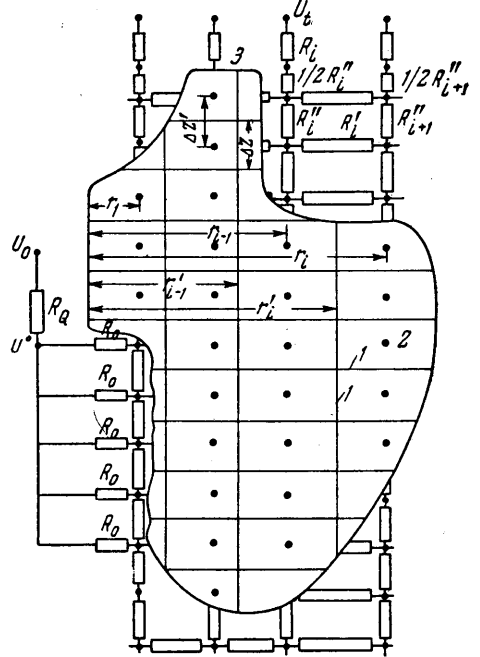
$$h^{\circ} = l \left( \ln \frac{h+l}{l} \right)^{-1} \quad (11)$$

Сопоставление расчетов понижений, получаемых по уравнениям (5) и (8) на



Фиг. 1

Фиг. 1. Схема несовершенной скважины в неограниченном пласте: 1 — статический уровень воды, 2 — свободная поверхность воды при работе скважины, 3 — фильтр (водоприемная часть) скважины, 4 — глухая часть скважины



Фиг. 2

Фиг. 2. Разбивка на блоки и схема модели: 1 — границы блоков, 2 — центры блоков (узловые точки модели), 3 — свободная поверхность потока

любой момент времени  $t$  при задании  $h^{\circ}$  по формуле (11), показывает их совпадение с точностью до десятых долей процента.

Для учета понижения кривой депрессии в расчетных зависимостях предлагается заменять величину  $h$  на ее средневзвешенное по времени значение  $\langle h \rangle$ , определяемое формулой

$$\langle h \rangle = h - \frac{1}{t} \int_0^t S_0 dt \quad (12)$$

Входящий в эту формулу интеграл может определяться простейшими численными приемами.

Для проверки изложенных выше решений были проведены расчеты на сеточном электроинтеграторе МСМ-1 по конечноразностной схеме, аналогичной схеме Либмана, применяемой для решения уравнения теплопроводности. Для реализации этой схемы составлялась плоская сетка сопротивлений, моделирующая осесимметричный поток

(фиг. 2), причем горизонтальные сопротивления  $R'$  и вертикальные  $R''$  рассчитывались по формулам

$$R_i' = \alpha \frac{1}{2\pi k \Delta z} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}, \quad R_i'' = \alpha \frac{\Delta z'}{k\omega_i}, \quad \omega_i = \pi [(r_i')^2 - r_{i-1}'^2] \quad (13)$$

Здесь:  $\alpha$  — масштаб электрических сопротивлений, а для задания условия (2) на свободной поверхности добавляются «временные» сопротивления  $R_i$ , определяемые по формуле

$$R_i = \frac{\Delta t}{\mu\omega_i} \alpha \quad (14)$$

Здесь  $\Delta t$  — интервал времени, с которым ведется расчет в конечно-разностной форме, причем на конце сопротивления  $R_i$  задается потенциал  $U_i$ , равный потенциалу на свободной поверхности, полученному на конец предыдущего интервала времени.

Сопротивления  $R_0$ , соединяющие первый блок со скважиной, определяются по формуле для сопротивлений  $R_i'$  при  $r_i = r_1$  и  $r_{i-1} = r^0$ ; для моделирования постоянного дебита скважины дополнительно подсоединяется произвольное сопротивление  $R_Q$ , причем в процессе решения задачи на концах этого сопротивления регулированием потенциала  $U_0$  должна обеспечиваться постоянная разность относительных потенциалов  $\Delta U_Q = -U^0$ , определяемая по формуле

$$\Delta U_Q = \frac{R_Q Q}{\alpha \Delta H_0} \quad (15)$$

Где  $\Delta H_0$  — разность напоров, соответствующая 100% падению потенциала на интеграторе.

Расчеты по такой схеме сначала были сделаны в линеаризованной постановке, когда положение свободной поверхности не изменялось, а закон ее снижения определялся по изменению напоров на поверхности  $z = 0$ . Сопоставление данных моделирования с результатами расчетов по формулам (7) показало практически полное их совпадение (расхождения не выходят за пределы точности моделирования).

Кроме того, на моделях были проведены расчеты с учетом изменения сопротивлений в связи со снижением свободной поверхности для двух задач, причем в первой из задач максимальное снижение уровня составляло  $0.2h$ , а во второй —  $0.7h$ . Сопоставительные расчеты показали, что в обоих случаях было достигнуто хорошее совпадение данных аналитических расчетов и моделирования, причем в первой задаче влияние снижения кривой депрессии вообще оказалось незначительным.

Приведенными зависимостями можно воспользоваться для определения гидрогеологических параметров по данным опытных откачек из несовершенных скважин. Удобнее для этой цели воспользоваться данными о снижении уровня свободной поверхности над скважиной и вести их обработку при помощи уравнения (5), которое можно представить в виде

$$\frac{h^0}{ct} + 1 = \frac{Q}{2\pi k h^0 S} \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует прямолинейная зависимость между величинами  $h^0/t$  и  $1/h^0 S$ . Следовательно, если нанести данные о снижении уровня свободной поверхности на график с координатами  $h^0/t$  и  $1/h^0 S$ , то точки должны лечь на прямую линию, которая на оси  $h^0/t$  (при  $1/h^0 S = 0$ ) отсекает величину  $-c$ , а на оси  $1/h^0 S$  (при  $h^0/t = 0$ ) отсекает величину  $2\pi k/Q$ , по которой нетрудно найти значение коэффициента фильтрации  $k$ .

Поступило 2 IX 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехтеоретиздат, 1952.
2. Белякова В. К. Неустановившийся приток групповых вод к скважинам. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.