К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА

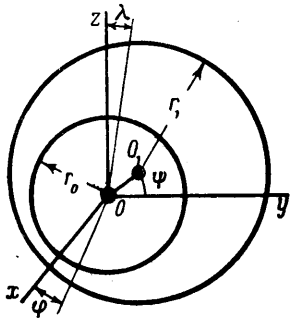
А. И. СНОПОВ, В. А. ЧАЙКИН

(*Ростов-на-Дону, Хабаровск*)

Задача о газовом сферическом подшипнике рассматривалась в работах [1, 2]. В настоящей работе, следуя [3], для улучшения сходимости ряда для давлений применен метод выделения особенности, позволяющий использовать решение и для больших эксцентриситетов.

1. Решается задача об установившемся изотермическом движении вязкого газа между неподвижной сферой и сферой, эксцентрично расположенной внутри нее и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω. Положим (см. фигуру) r_0 — радиус внутренней сферы, r_1 — радиус внешней сферы, e — эксцентриситет, ψ — угол между линией центров и плоскостью, перпендикулярной оси вращения, Q — количество смазки в зазоре между сферами.

Поместим начало координат в центре внутренней сферы, ось z совместим с вектором ω, ось y проведем в плоскости zOO_1 так, чтобы угол ψ был по модулю меньше $^1/_2\,\pi$, ось x проведем так, чтобы система координат была правой. Решаем задачу на основе безразмерных уравнений Рейнольдса (1.1)



$$\frac{\partial p}{\partial \zeta}=0, \qquad \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \zeta^2}=\frac{\theta}{\sin\lambda}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \zeta^2}=\theta\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho u_\lambda \sin\lambda)+\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho u_\varphi)-\frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho u_r \sin\lambda)=0, \qquad p=\rho$$

причем

$$v_\lambda=u_\lambda\omega r_0, \qquad v_\varphi=u_\varphi\omega r_0, \qquad v_r=u_r\omega\delta$$

$$\delta=r_1-r_0, \qquad \zeta=\frac{r_1-r}{\delta}, \qquad p'=p^*p, \qquad \varepsilon=\frac{e}{\delta}$$

$$\rho'=\rho^*\rho, \qquad \theta=\frac{\delta^2 p^*}{r_0{}^2\mu\omega}, \qquad p'=\text{const}\,\rho'$$

Здесь r, φ, v — сферические координаты (см. фигуру), v_r, v_φ, v_λ — компоненты скорости, p^* и ρ^* — средние давление и плотность газа в зазоре; при этом

$$\zeta=1 \quad \text{(на шипе)}$$

$$\zeta=\zeta_0=-\varepsilon(\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\lambda) \quad \text{(на подшипнике)} \tag{1.2}$$

После исключения u_φ и u_λ из уравнений (1.1) задача сводится к решению уравнения Рейнольдса для давления

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[p\frac{\partial p}{\partial\lambda}(1-\zeta_0)^3\sin\lambda\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[p\frac{\partial p}{\partial\varphi}\frac{(1-\zeta_0)^3}{\sin\lambda}-\frac{6}{\theta}\sin\lambda p(1-\zeta_0)\right]=0 \tag{1.3}$$

при условии постоянства количества смазки в зазоре

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}p\sin\lambda(1-\zeta_0)\,d\varphi d\lambda=4\pi \tag{1.4}$$

2. Решение уравнения (1.3) ищем в виде ряда по степеням относительного эксцентриситета $\varepsilon=e/\delta$.

Положим

$$p=p_0+p_1\varepsilon+p_2\varepsilon^2+\ldots \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.3) и сравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем бесконечную систему уравнений для определения p_n. На основе (1.4) получаем, что

p_n должны удовлетворять условиям

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p_0 \sin\lambda d\varphi d\lambda = 4\pi, \quad \int_1^{\pi}\int_0^{2\pi} [p_n + p_{n-1}(\sin\lambda\sin\varphi\cos\psi + \cos\lambda\sin\psi)]\sin\lambda d\varphi d\lambda = 0$$

Нетрудно найти, что

$$p_0 = 1,\ p_1 = b\sin\lambda\sin\varphi + a\sin\lambda\cos\varphi$$

$$p_2 = \sin^2\lambda\,(k\sin 2\varphi + m\cos 2\varphi + t) + \sin\lambda\cos\lambda\,(l\sin\varphi + n\cos\varphi)$$

$$a = -\frac{3\theta\beta}{\theta^2+9},\quad b = -\frac{9\beta}{2\theta^2+9},\quad t = \frac{9\beta^2}{\theta^2+9}$$

$$k = \frac{3\theta\beta^2(3\theta^4+5\theta^2+72)}{4(\theta^2+4)(\theta^2+9)^2},\quad m = -\frac{3\beta^2(7\theta^4+30\theta^2+108)}{2(\theta^2+4)(\theta^2+9)^2}$$

$$l = \frac{3\alpha\beta(5\theta^2+3)}{(\theta^2+9)(\theta^2+1)},\quad n = -\frac{3\theta\alpha\beta(1-3\theta^2)}{(\theta^2+9)(\theta^2+1)}\quad \begin{pmatrix}\alpha=\sin\psi\\ \beta=\cos\psi\end{pmatrix}$$

При $\varepsilon = 1$ давление имеет особенность в точке минимального зазора. Выделим ее, положив

$$p = \frac{q}{1-\zeta_0}\quad (q = q_0 + q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2 + \ldots)$$

Так как p определено в виде ряда (2.1), то значения q_n определяются, очевидно, из равенства

$$q_0 + \varepsilon q_1 + \ldots = (1-\zeta_0)(p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots) \tag{2.2}$$

Сравнивая в (2.2) члены при одинаковых степенях ε, получаем

$$q_n = p_n + p_{n-1}\,(\sin\lambda\sin\varphi\cos\psi + \cos\lambda\sin\psi) \tag{2.3}$$

Согласно (2.3), получаем

$$q_0 = 1,\qquad q_1 = \beta\sin\lambda\,(A\sin\varphi + B\cos\varphi)\,\alpha\cos\lambda$$

$$q_2 = \beta^2\sin^2\lambda\,(C\sin 2\varphi + D\cos 2\varphi) - \alpha\beta\sin\lambda\cos\lambda\,(E\cos\varphi + F\sin\varphi)$$

$$A = \frac{\theta^2}{\theta^2+9},\quad B = -\frac{3\theta}{\theta^2+9},\quad C = \frac{3\theta^2(\theta^2-21)}{4(\theta^2+4)(\theta^2+9)^2}$$

$$D = \frac{3\theta^2(9-4\theta^2)}{2(\theta^2+4)(\theta^2+9)^2},\quad E = \frac{3\theta(3-\theta^2)}{2(\theta^2+9)(\theta^2+1)},\quad F = -\frac{6\theta^2}{(\theta^2+9)(\theta^2+1)}$$

Ограничиваясь первыми тремя приближениями, будем считать, что

$$p = \frac{q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2}{1-\zeta_0}$$

Можно ожидать, что эта формула пригодна и при больших значениях ε.

3. При определении воздействия смазки на внутреннюю сферу будем пренебрегать силами трения по сравнению с силами давления. В этом случае имеем

$$F_x = -r_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\sin^2\lambda\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda,\quad F_y = -r_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\sin^2\lambda\sin\varphi\,d\varphi\,d\lambda$$

$$F_z = -r_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\sin\lambda\cos\lambda\,d\varphi\,d\lambda$$

$$M_x = -r_0^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\lambda\sin\varphi\tau_{r\lambda} + \sin\lambda\cos\lambda\cos\varphi\tau_{r\varphi})\,d\varphi\,d\lambda$$

$$M_y = r_0^3 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\sin\lambda\cos\varphi\tau_{r\lambda} - \sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi\tau_{r\varphi})\, d\varphi\, d\lambda, \quad M_z = r_0^3 \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\lambda\tau_{r\varphi}\, d\varphi\, d\lambda$$

$$p = \frac{p^* q}{1-\zeta_0}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\mu\omega r_0}{\delta}\left[\frac{\theta}{2\sin\lambda}\left(\frac{\partial q}{\partial\varphi} - \frac{\varepsilon\beta\sin\lambda\cos\varphi q}{1-\zeta_0}\right) + \frac{\sin\lambda}{1-\zeta_0}\right] \qquad (3.1)$$

$$\tau_{r\lambda} = -\frac{\mu\omega r_0\theta}{2\delta}\left[\frac{\partial q}{\partial\lambda} - \frac{\varepsilon(\beta\sin\varphi\cos\lambda - \alpha\sin\lambda)\, q}{1-\zeta_0}\right]$$

Вычисление интегралов (3.1) дает

$$F_x = -\frac{2\pi p^* r_0^2}{\varepsilon}\left[B\left(1 - \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) - (E_\alpha + C_\beta)\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon^2 - \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]$$

$$F_y = -\frac{2\pi p^* r_0^2}{\varepsilon}\left\{(\beta - A)\left(2 - 3\alpha^2 + \frac{3\alpha^2 - \alpha^2\varepsilon^2 - 2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) - \right.$$

$$- F_\alpha\left[2 - 5\alpha^2 - 2\varepsilon^2 - \frac{4}{3}\beta^2\varepsilon^2 + \frac{5\alpha^2 - 2 + \varepsilon^2(3\beta^2+1)}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] -$$

$$\left. - D\beta\left[2 - \frac{4}{3}\varepsilon^2\alpha^2\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{1}{\beta^2} - \frac{5\alpha^4}{\beta^2} + \frac{5\alpha^4 - 1 - 2\beta^2 + \varepsilon^2\beta^2(3\alpha^2+1)}{2\beta^2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]\right\}$$

$$F_z = \frac{2\pi\alpha\beta p^* r_0^2}{\varepsilon}\left\{\left(3 - \frac{3-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)(A - \beta) + \right. \qquad (3.2)$$

$$+ \frac{D}{\beta}\left[-1 + 5\alpha^2 + \frac{4}{3}\varepsilon^2(1+\beta^2) - \frac{5\alpha^2 - 1 + 3\beta^2\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] -$$

$$\left. - \frac{F}{\alpha}\left[\frac{2}{3}(1 - 2\alpha^2)\varepsilon^2 - 1 + 5\alpha^2 - \frac{5\alpha^2 - 1 + \varepsilon^2(1 - 3\alpha^2)}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]\right\}$$

$$M_x = \frac{\mu\omega r_0^4}{\delta}\,\frac{\varepsilon\theta}{2p^* r_0^2}(-\alpha F_y + \beta F_z)$$

$$M_y = -\frac{\mu\omega r_0^4}{\delta}\left[-\frac{\alpha\varepsilon\theta}{2p^* r_0^2}F_x + \frac{2\pi\alpha\beta}{\varepsilon^2}\left(3 - \frac{3-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]$$

$$M_z = -\frac{\mu\omega r_0^4}{\delta}\left[\frac{\beta\varepsilon\theta}{2p^* r_0^2}F_x + \frac{2\pi}{\varepsilon^2}\left(-1 + 3\alpha^2 - \frac{3\alpha^2 - 1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^2\beta^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]$$

Заметим, что при замене ψ на $-\psi$ проекции нагрузки и момента F_z, M_x, M_y меняют знак, а F_x, F_y, M_z не изменяются.

На основе формул (3.2) можно сделать следующие выводы.

1. Если ось вращения совпадает с линией центров, то момент направлен по оси вращения.

2. Если ось вращения перпендикулярна линии центров, то момент направлен по оси вращения, а нагрузка на шип перпендикулярна моменту.

3. При заданном M_z нагрузка на шип достигает максимального значения, когда ось вращения перпендикулярна линии центров.

4. Когда скорость вращения велика, вектор нагрузки лежит в плоскости оси вращения и линии центров; когда скорость вращения мала, вектор нагрузки перпендикулярен к этой плоскости, как и в случае жидкостной смазки.

Поступило 14 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. S a g o t J. Theorie et calcul du palier a gaz spherique, Techn. et sci. aeronaut., 1963, No 1, 9—19.
2. В. А. Чайкин. О газовом сферическом подшипнике, Материалы XVI научной студенческой конференции. Издательство Ростовского университета, 1963, стр. 40—44.
3. А. И. Снопов. Плоская задача гидродинамической теории газовой смазки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6, стр. 14—20.