

## СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ И РЕШЕТКАХ

А. И. БУНИМОВИЧ, М. Л. КАГАН

(Москва)

Рассмотрена задача о течении разреженного газа в плоских каналах и решетках при свободно-молекулярном режиме. Параметры ячеек решетки (канала) и полные геометрические размеры решетки считаются меньшими средней длины свободного пробега молекул. Профили решетки считаются тонкими, материал профилей — идеальный проводник тепла. Для случая диффузного отражения молекул от поверхности решетки (канала) проведен расчет вероятности прохождения молекул, определены аэродинамические характеристики решетки.

§ 1. Обтекание плоской решетки профилей свободно-молекулярным потоком. Рассмотрим плоскую решетку тонких профилей (фиг. 1). Направим ось  $y$  по оси решетки, ось  $x$  — перпендикулярно. Угол выноса (угол между осью  $x$  и хордой профиля) обозначим  $\gamma$ . Пусть решетка движется с постоянной скоростью  $U$ . Для удобства обратим задачу, считая, что решетка неподвижна, а поток набегает на нее, т. е. будем рассматривать течение в системе координат, связанных с решеткой. Направляющие косинусы вектора скорости с осями координат будем обозначать соответственно  $l_1, l_2$ .

Функция распределения скоростей для молекул набегающего потока соответствует закону равновесного распределения Максвелла при температуре потока  $T_\infty$ , т. е. имеет вид

$$f(\xi', \eta') = \frac{h_\infty}{\pi} \exp \{-h_\infty [(\xi' - Ul_1)^2 + (\eta' - Ul_2)^2]\} \quad (1.1)$$

$$\xi' = \xi + Ul_1, \quad \eta' = \eta + Ul_2, \quad h_\infty = 1/2 RT_\infty$$

Здесь  $\xi, \eta$  — составляющие тепловой скорости молекул,  $R$  — газовая постоянная.

Число молекул  $n(P)$ , попадающих в единицу времени на элемент поверхности (фиг. 1), ячейки  $d\sigma(P)$ , окружающий точку  $P$ , можно представить как сумму числа молекул  $N_1(P)$  первичного (набегающего) потока и числа молекул  $N_2(P)$ , попадающих на элемент  $d\sigma(P)$  вследствие отражения от другого профиля ячейки.

Величина  $N_1^+(P)$  для верхнего профиля определяется формулой

$$N_1^+(x_0) = -\frac{h_\infty}{\pi} n_0 \cos \gamma \int_0^t dy \int_0^\infty \left( \sin \gamma + \frac{x_0 \operatorname{tg} \gamma - y}{x_0} \cos \gamma \right) \times \\ \times \frac{\xi'^2}{x_0} \exp \left\{ -h_\infty \left[ (\xi' - Ul_1)^2 + \left( \xi' \frac{x_0 \operatorname{tg} \gamma - y}{x_0} - Ul_2 \right)^2 \right] \right\} d\xi' \quad (1.2)$$

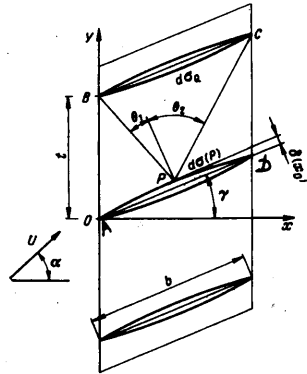
Учитывая, что при диффузном отражении излучение молекул происходит по закону Ламберта, получим выражение для  $N_2^+(P)$

$$N_2^+(x_0) = -2 \frac{h}{\pi} \cos \gamma \int_0^{b'} dx \int_0^\infty \frac{t\eta^2}{[t + (x_0 - x) \operatorname{tg} \gamma]^2} \left[ \cos \gamma + \frac{x_0 - x}{t + (x_0 - x) \operatorname{tg} \gamma} \sin \gamma \right] \times \\ \times n_0^-(x) \exp \left\{ -h\eta^2 \left[ \left( \frac{x_0 - x}{t + (x_0 - x) \operatorname{tg} \gamma} \cos \gamma - \sin \gamma \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \cos \gamma + \frac{x_0 - x}{t + (x_0 - x) \operatorname{tg} \gamma} \sin \gamma \right)^2 \right] \right\} d\eta \quad (b' = b \cos \gamma) \quad (1.3)$$

(Отметим, что выражение для  $N_1^+, N_1^-$ , использованное в работах [1, 2], неточно, так как не учитывается затенение рассматриваемой точки)<sup>1</sup>.

Аналогично определяются  $N_1^-(x_0), N_2^-(x_0)$ .

<sup>1</sup> Расчетные данные о вероятности прохождения молекул газа через канал приведены в работе [3]. Авторы не приводят явное выражение для  $N_1$  и  $N_2$ .



Фиг. 1. Схема плоской решетки профилей

Таким образом, задача сводится к решению системы двух линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} n^+(x_0) &= N_1^+(x_0) + N_2^+(x_0) = n_0^+(x_0) + \int_0^{b'} K^+(x_0, x) n^-(x) dx \\ n^-(x_0) &= N_1^-(x_0) + N_2^-(x_0) = n_0^-(x_0) + \int_0^{b'} K^-(x_0, x) n^+(x) dx \end{aligned} \quad (1.4)$$

§ 2. Аэродинамические характеристики. После определения числа молекул  $n(P)$ , попадающих на элемент решетки, перейдем к определению аэродинамических сил. Силовое воздействие на решетку можно также представить в виде

$$P(p) = P_0(p) + P_1(p) = P_0(p) + m \int_S K(p, Q) n(Q) dS(Q) \quad (2.1)$$

Силовое воздействие молекул набегающего потока, непосредственно (без предшествующих отражений) попавших на верхний профиль, определяется формулами, которые можно получить, если домножить подынтегральное выражение в (1.2) соответственно на

$$m\xi', \quad m\xi' \frac{x_0 \operatorname{tg} \gamma - y}{x_0} \quad \text{для } X_{0i}^+(x_0), Y_{0i}^+(x_0)$$

индекс  $i$  для набегающих молекул. Аналогично определяются  $X_{0i}^-(x_0), Y_{0i}^-(x_0)$ .

Силовое воздействие молекул, попавших на верхний профиль после одного или более отражений, можно получить, если умножить подынтегральное выражение в (1.3) соответственно на

$$m\eta \frac{x_0 - x}{(x_0 - x) \operatorname{tg} \gamma - t}, \quad m\eta \quad \text{для } X_{1i}^+(x_0), Y_{1i}^+(x_0)$$

Аналогично определяются  $X_{1i}^-(x_0), Y_{1i}^-(x_0)$ .

Теперь определим аэродинамические силы, возникающие при отражении (испускании стенкой) молекул

$$X_r^+(x_0) = \frac{m}{2 \cos \gamma} \left( \frac{\pi}{h} \right)^{1/2} n^+(x_0) \sin(\gamma + \delta(x_0)) \quad (2.2)$$

$$Y_r^+(x_0) = \frac{m}{2 \cos \gamma} \left( \frac{\pi}{h} \right)^{1/2} n^-(x_0) \cos(\gamma + \delta(x_0)) \quad (2.3)$$

Аналогично определяются  $X_r^-(x_0), Y_r^-(x_0)$ .

Входящий в полученные формулы коэффициент  $h$  при предположении о диффузном отражении зависит от температуры стенки. Считая, что материал профилей — идеальный проводник тепла, т. е. температура по всему профилю одинакова, составим уравнение баланса тепла без учета внешней тепловой радиации

$$E_i = E_r + \varepsilon \sigma S^* T^* \quad (2.4)$$

Здесь  $\varepsilon$  — коэффициент, зависящий от свойств поверхности,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $S^*$  — приведенная площадь излучения.

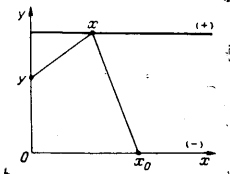
Так как часть теплового излучения снова попадает на поверхность элемента решетки (фиг. 2), то, учитывая, что энергия излучается по закону Ламберта, получим

$$S^* = 2 \int_0^{b'} \left[ \int_{\theta_{01}}^{1/2 \pi} \cos \theta d\theta + \int_{\theta_{02}}^{1/2 \pi} \cos \theta d\theta \right] dx_0 \quad (2.5)$$

Энергия, передаваемая верхнему профилю набегающим газом, определяется по формуле

$$\begin{aligned} E_i^+ &= -\frac{h_\infty}{\pi} n_0 m \cos \gamma \int_0^{b'} dx_0 \int_0^t dy \int_0^\infty \left( \sin \gamma + \frac{x_0 \operatorname{tg} \gamma - y}{x_0} \cos \gamma \right) \frac{\xi'^4}{x_0} \times \\ &\times \exp \left\{ -h_\infty \left[ (\xi' - U_{l1})^2 + \left( \xi' \frac{x_0 \operatorname{tg} \gamma - y}{x_0} - U_{l2} \right)^2 \right] \right\} d\xi' \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогично определяется  $E_i^-$ .



Фиг. 2. Эскиз ячейки (канала) решетки

Как известно [4], энергия, уносимая отраженными молекулами, равна

$$E_r^+ = mRTN_r^+, \quad E_r^- = mRTN_r^- \quad (2.7)$$

Из закона сохранения массы следует, что

$$N_r^+ = N_i^+ = \int_0^{b'} n_0^+(x_0) dx_0, \quad N_r^- = N_i^- = \int_0^{b'} n_0^-(x_0) dx_0,$$

§ 3. Течение разреженного газа через плоский канал. В этом случае  $U = 0$ . Для простоты будем считать, что с одной стороны канала находится газ, с другой — вакуум. Определим вероятность прохождения молекул газа через канал. Очевидно, что  $n^+(x_0) = n^-(x_0)$ . Тогда система (1.3) превращается в одно уравнение

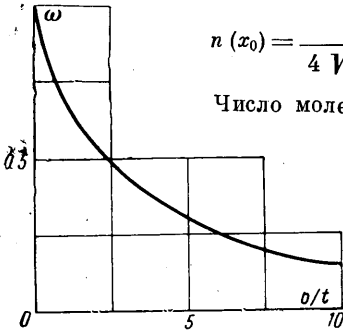
$$n(x_0) = \frac{1}{4\sqrt{\pi h}} \left[ 1 - \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \right] + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{n(x) dx}{[(x_0-x)^2 + 1]^{3/2}} \quad (3.1)$$

Число молекул, вышедших из канала через сечение  $CD$ , равно

$N_- = N_0 - N$ , Здесь  $N_0$  — число молекул, попавших в канал,  $N$  — число молекул, вышедших через сечение  $AB$ . Вероятность прохождения молекул через канал равна

$$\omega = \frac{N_0 - N}{N_0} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) решалось методом замены системой алгебраических уравнений, интеграл в (3.1) заменялся по формуле приближенного интегрирования Гаусса с четырьмя узлами. Зависимость  $\omega(b/t)$  для значений  $b/t = 0.1, 1, 10$  показана на фиг. 3.



Фиг. 3. Вероятность прохождения молекул через канал как функция  $b/t$

казана на фиг. 3.

§ 4. Обтекание потоком разреженного газа плоской решетки пластин. Для простоты примем, что  $\gamma = 0$  (т. е. решетка без выноса) и будем рассматривать случай больших скоростей  $|U| \gg C_i = \sqrt{2RT_\infty}$ . Тогда (1.3) принимает вид

$$n^+(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{n^-(x) dx}{[(x_0-x)^2 + 1]^{3/2}}, \quad n^-(x_0) = n_0 U \sin \alpha + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{n^+(x) dx}{[(x_0-x)^2 + 1]^{3/2}} \quad (4.1)$$

Теперь определим силы

$$\begin{aligned} X &= X_0^+ + X_0^- + X_1^+ + X_1^- + X_r^+ + X_r^- \\ Y &= Y_0^+ + Y_0^- + Y_1^+ + Y_1^- + Y_r^+ + Y_r^- \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из условий задачи вытекает, что  $X_0^+ = X_1^- = X_2^- = X_r^+ = Y_0^+ = 0$ . Уравнение (2.4) принимает вид ( $\gamma = c_p/c_v$ )

$$\frac{1}{2} m n_0 U^3 \sin \alpha = m n_0 U \sin \alpha \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} RT + \epsilon \sigma S^* T^4, \quad S^* = 4 \int_0^b dx_0 \int_0^1 \frac{x_0 y dy}{(x_0^2 + y^2)^{3/2}},$$

Задача вычислялась для  $b/t = 0.1, 1, 10$ .

1.  $b/t = 0.1, X = 0.1A U \cos \alpha, S^* = 0.19, Y = 0.1A U \sin \alpha + 0.083A / \sqrt{h}$
2.  $b/t = 1, X = A U \cos \alpha, S^* = 1.172, Y = A U \sin \alpha + 0.314 A / \sqrt{h}$
3.  $b/t = 10, X = 10A U \cos \alpha, S^* = 1.9, Y = 10A U \sin \alpha + 0.491 A / \sqrt{h}$   
 $A = m n_0 U \sin \alpha, \quad h = 1/2RT$

Поступило 13 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Отмахова И. П. Сопротивление полусферы, движущейся с постоянной скоростью в разреженном газе. Вестн. Моск. ун-та, 1958, № 4.
2. Лариш Э. Аэродинамическое воздействие при свободно-молекулярном обтекании. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
3. K r u g e r, S h a r i g o. The Axial-Flow Compressor in Free-Molecule Range «Rarefied gas Dynamics». Edit. Talbot, N. Y., 1962.
4. Хейз У. Д., Пробстин П. П. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.