

ЛИТЕРАТУРА

1. K o r s t H. H. A theory for base pressure in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4 (русск. перев.: Механика. Сб. обз. и перев. ин. период. лит., 1956, № 5 (45)).
2. C h a r m a n D. R., K u e h n D. M., L a r s o n H. K. Investigation of separated flow in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA, 1958, Rept 1356.
3. Г о г и ш Л. В., С т е п а н о в Г. Ю. Приближенный расчет двухмерных сверхзвуковых течений с характеристиками малой кривизны. Докл. на II Всесоюзн. съезде по теор. и прикл. механ., Изд-во «Наука», 1964.
4. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М., Н е к р а с о в И. П., Ч е р н ы й Г. Г. Об отрыве пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Докл. на I Всесоюзн. съезде по теор. и прикл. механ. Изд-во АН СССР, 1960.
5. C h a r m a n D. R. An analysis of base pressure at supersonic velocities and comparison with experiment. NASA, 1951, Rept. 1051.
6. H a s t i n g s R. C. A note on the interpretation of base pressure measurements in supersonic flows. Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1958, No. 409.
7. S i r i e i x M. Pression de culot et processus de mélange turbulent en écoulement supersonique plan. Rech. Aéronaut., 1960, No. 78.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЗА ТОЧКОЙ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В. Н. ШМАНЕНКОВ

(Москва)

Особенность в точке разрыва граничных функций на стенке в рамках уравнений параболического типа (уравнений пограничного слоя) может быть раскрыта лишь специальным методом [1,2]. Известно, что метод конечных разностей в окрестности точки разрыва граничных условий дает весьма приближенные результаты [3].

Рассмотрим, например, задачу о вдуве в ламинарный пограничный слой, когда начало вдува не совпадает с точкой образования пограничного слоя (фиг. 1, а). Пусть до сечения $x = x_0$ (ось x направлена вдоль обтекаемой поверхности, ось y — по нормали к ней) имеет место твердая стенка с обычными условиями прилипания: $u = v = 0$ при $y = 0$. Профиль скорости в пограничном слое на этом участке можно считать известным (например, в случае пластины — профиль Блазиуса). За точкой $x = x_0$ осуществляется вдув газа в пограничный слой по некоторому закону $v_w = v_w(x)$, причем в точке $x = x_0$ поперечная составляющая вектора скорости v_w меняется скачком. Таким образом, в точке $x = x_0, y = 0$ имеет место, по крайней мере, разрыв функции тока $\psi(x, y)$ и ее производной $\partial\psi/\partial x$. Чтобы продолжить решение в область $x > x_0$, следуя [2], принимаем следующую модель течения в окрестности $x = x_0$. В точке $x = x_0$ берет начало ламинарный слой (условно будем называть его «внутренним слоем»), внешним потоком для которого является линейный участок профиля скорости в набегающем пограничном слое. Профиль скорости во «внутреннем слое», описываемом уравнениями пограничного слоя, должен плавно переходить в профиль скорости «внешнего» потока u_e :

$$u_e = \frac{\tau_w(x_0)y}{\mu} = c_f R U \frac{y}{x_0}, \quad c_f = \frac{\tau_w(x_0)}{\rho U^2}, \quad R = \frac{\rho U x_0}{\mu}$$

Здесь τ_w — напряжение трения на стенке, μ — коэффициент вязкости, U — скорость на границе пограничного слоя. Таким образом, задача о течении во «внутреннем слое» сводится к задаче о пограничном слое в потоке с поперечным градиентом скорости. Граничные условия в этом случае ставятся следующим образом [5]:

$$u = 0, \quad v = v_w(x) \text{ при } y = 0, \quad u \rightarrow \frac{\tau_w(x_0)}{\mu} (y - \delta^*) \text{ при } y \rightarrow +\infty \quad (1)$$

Толщина вытеснения δ^* определяется из условия равенства расходов

$$\int_0^y u dy - G \rightarrow \int_0^{y-\delta^*} u_e dy = \frac{\tau_w(x_0)}{2\mu} (y - \delta^*)^2 \text{ при } y \rightarrow +\infty, \quad G = \int_{x_0}^x v_w dx \quad (2)$$

Здесь G — масса дувяемого через стенку газа. Условия (1) справедливы до тех пор, пока внешняя граница «внутреннего слоя» не выйдет за пределы линейной части профиля u_e . Для простоты анализа считаем, что газ несжимаем и однороден по составу. Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что влиянием «внутреннего слоя» на внешний потенциальный поток можно пренебречь (например, малый расход дувяемого газа) и давление вдоль поверхности остается всюду постоянным. Уравнение несжимаемого пограничного слоя при введении функции тока $\psi(x, y)$ имеет вид [4]

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (3)$$

Введем безразмерную функцию тока

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{\mu}{\tau_w(x_0) \delta^2} \psi(x, y) = \frac{x_0 \psi(x, y)}{c_f R U \delta^2}$$

$$\xi = \frac{x - x_0}{x_0}, \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (4)$$

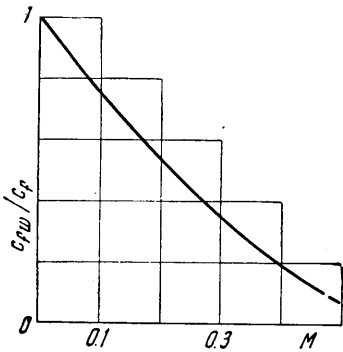
Функция $\delta(x)$ — характерный поперечный размер «внутреннего слоя», определяется из соображений размерности. Подставляя (4) в уравнение (3), имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \left(\frac{\delta^3}{x_0} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \left(2\delta^2 \frac{d\delta}{dx} \Psi + \frac{\delta^3}{x_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) = \frac{x_0^2}{c_f R^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3} \quad (5)$$

Полагая $\delta^2 d\delta/dx = x_0^2/c_f R^2$ и учитывая, что $\delta = 0$ при $x = x_0$, получаем

$$\delta = x_0 \left(\frac{3\xi}{c_f R^2} \right)^{1/3}$$

Указанное преобразование совпадает с результатами [6], где показано, что в начальной части следа за тонкой пластиной толщина следа растет пропорционально $\xi^{1/3}$. Уравнение (5) в окончательной безразмерной форме имеет вид



Фиг. 2

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3} + 2\Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 = 3\xi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right)$$

Граничные условия (1), (2) запишутся так:
при $\eta = 0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0, \quad -2\Psi - 3\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{v_w(\xi)}{U} \left(\frac{c_f}{3\xi R} \right)^{-1/3}$$

при $\eta \rightarrow +\infty$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \rightarrow \eta - \frac{\delta^*}{\delta} = \eta - \Delta(\xi), \quad \Psi(\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\eta - \Delta)^2}{2} \quad (7)$$

Здесь $v_w(\xi)$ — заданная функция. В общем случае решение уравнения (6) при граничных условиях (7) можно искать в виде рядов типа

$$\Psi(\xi, \eta) = F(\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{k-1/3} F_k(\eta)$$

Первый член ряда будет соответствовать автомодельному режиму течения, осуществляющемуся при законе длува: $v_w \sim \xi^{-1/3}$. Рассмотрим подробнее этот случай. Пусть

$$v_w = 2UM \left(\frac{c_f}{3R} \right)^{1/3} \xi^{-1/3}$$

где M — параметр длува. Уравнение (6) и граничные условия (7) приводятся к виду

$$F''' + 2FF'' - F'^2 = 0 \quad (F' \equiv dF/d\eta) \quad (8)$$

$$F = -M, \quad F' = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$F' \rightarrow \eta - \Delta_0, \quad F \rightarrow 1/2 (\eta - \Delta_0)^2 \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty \quad (9)$$

η	F	F'	F''	η	F	F'	F''
3.58	8.0529	4.0132	1.0000	-3.07	-0.5882	0.0201	0.0242
3.07	6.1292	3.6012	1.0000	-3.58	-0.5959	0.0109	0.0131
2.56	4.4676	2.9892	1.0000	-4.09	-0.6000	0.0058	0.0071
2.05	3.0682	2.4773	0.9996	-4.61	-0.6022	0.0031	0.0038
1.53	1.9307	1.9667	0.9921	-5.12	-0.6034	0.0017	0.0021
1.02	1.0525	1.4679	0.9452	-5.63	-0.6041	0.0009	0.0011
0.511	0.4210	1.0139	0.8135	-6.14	-0.6044	0.0005	0.0006
0	0	0.6478	0.6120	-6.65	-0.6046	0.0003	0.0003
-0.511	-0.2603	0.3885	0.4048	-7.17	-0.6047	0.0001	0.0002
-1.02	-0.4133	0.2228	0.2490	-7.68	-0.6048	0.0001	0.0001
-1.53	-0.4999	0.1243	0.1440	-8.19	-0.6048	0	0.0001
-2.05	-0.5478	0.0683	0.0806	-8.70	-0.6048	0	0
-2.56	-0.5740	0.0371	0.0443				

где Δ_0 — постоянная величина. Таким образом, имеем четыре условия для определения трех констант интегрирования и величины Δ_0 . Асимптотическое условие на бесконечности можно записать следующим образом: $F'' \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow +\infty$. В этом нетрудно убедиться подстановкой условий (9) в уравнение (8).

Для численного интегрирования уравнения (8) удобно при $\eta = 0$ поставить условие $F''(0) = \beta$, где β подбирается так, чтобы $F'' \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Легко видеть, что интегральная кривая уравнения (8) при заданных граничных условиях допускает в бесконечности асимптотическое стремление второй производной к некоторой постоянной величине γ . Преобразование $F = \gamma^{-1}\Phi(\theta)$, $\theta = \gamma\eta$ не изменяет вида уравнения (8), и в то же время $\Phi''(\infty) = 1$.

Численное интегрирование уравнения (8) было выполнено на ЭВМ при следующих значениях параметра вдува M : 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.46. Искомые функции были затабулированы; результаты расчетов представлены на фиг. 2 в виде $c_{fw}/c_f = f(M)$.

Задача о начальном участке струйного пограничного слоя сводится к решению уравнения (8) при следующих граничных условиях [2]:

$$F'' \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow +\infty$$

$$F' = F'' = 0 \text{ при } \eta \rightarrow -\infty$$

Результаты численного интегрирования приведены в виде таблицы. Точность расчетов выше четвертого знака после запятой. Параметры на разделяющей линии тока ($\eta = 0$) изменяются так:

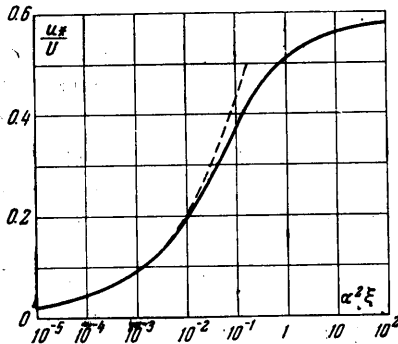
$$u_* = 0.9341 U(c_f^2 R \xi)^{1/3}, c_{f*} = 0.612 c_f \quad (10)$$

Для пограничного слоя на плоской пластине [4]

$$c_f R^{1/2} = \alpha, \alpha = 0.332$$

Из (10) следует

$$u_* = 0.9341 U (\alpha^2 \xi)^{1/3} \quad (11)$$



Фиг. 3

Сравнение расчетных данных на основании формулы (11) (фиг. 3, пунктирная кривая) с результатами численного интегрирования методом конечных разностей ([1], сплошная кривая) показывает, что автоматический по $\eta \sim y/\xi^{1/3}$ режим течения осуществляется на участке до $\alpha^2 \xi \approx 10^{-2}$, т. е. до $(x - x_0)/x_0 \approx 0.1$. Протяженность этого участка не зависит от числа Рейнольдса.

Поступила 14 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Denison M. R., Baum E. Compressible Free Shear Layer with Finite Initial Thickness, AIAA Journal, 1963, vol. 1, No 2.
2. Baum E. Initial Development of the Laminar Separated Shear Layer, AIAA Journal, 1964, vol. II, No. 1.
3. Smith A. M. O., Clutter D. W. Solution of the Incompressible Laminar Boundary Layer Equations, AIAA, Journal, 1963, vol. 1, No. 9.
4. Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
5. Glaucert M. B. The Boundary Layer im Simple Shear Flow Past a Flat Plate. JAS, 1957, vol. 24, No. 11.
6. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1930, vol. 26.