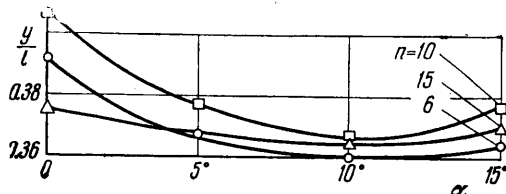


В работе [6] было показано, что распределение давления на стенке V-образного крыла состоит из участка постоянного давления, определяемого скачком, присоединенным к ребру, и области более высокого постоянного давления, возникающей после прохождения потока через второй скачок. Последующее отражение скачков не дало заметного повышения давления. Было получено хорошее совпадение теории и эксперимента по распределению давления; некоторое отличие данных заключалось в увеличении областей повышенного давления. Таким образом, распределение давления на крыле в основном определяется положением системы первых пересекающихся скачков. В этой связи интересно сравнить расчетное положение линии пересечения скачков, присоединенных к передним кромкам, с экспериментальными данными. На фиг. 5 крестиком с цифрой 6 и на фиг. 6 пунктирной кривой показаны расчетные значения линии пересечения. Как видно из графиков, данные расчета и эксперимента близки между собой.



Фиг. 8

Некоторое завышение положения линии пересечения скачков сравнительно с теорией вызывается заниженным числом M и влиянием вязкости.

Рассмотрим структуру течения на нерасчетных режимах при углах атаки. Положительному углу атаки соответствует поворот потока внутрь модели. На фиг. 7 для модели с $n = 6$ представлен контур модели и положения скачков уплотнений при углах атаки $\alpha = 0, 5, 10, 15^\circ$. Для моделей с $n = 6$ и 10 линия пересечения скачков по углам атаки становится несколько размытой (6 на фиг. 4), причем возрастание угла атаки приводит к сужению полосы размытости. Влияние угла атаки на положение полосы в следе показано на фиг. 8. Экспериментальные данные построены по четкой верхней границе полосы. По мере увеличения угла атаки от 0 до 10° верхняя граница полосы приближается к оси модели, однако при дальнейшем увеличении угла атаки наблюдается перемещение этой линии вверх. Такая аномалия может быть объяснена тем, что при больших углах атаки происходит замена регулярного пересечения скачков маховским взаимодействием.

Поступило 9 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о н о р А. Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1
2. M i e l e A., S a a r i s G. On the Optimum Transversal Contour of a Body at Hypersonic Speeds *Astronaut Acta*, 1963, vol. 9, No. 3.
3. Г о н о р А. Л. Определение формы пространственного оптимального тела с учетом сил трения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 4, 1965.
4. Ч е р н ы й Г. Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. М а й к а п а р Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
6. Г о н о р А. Л., Ш в е ц А. И. Исследование распределения давления на некоторых звездообразных телах при числе $M=4$, ПМТФ, 1965, № 6.
7. Г о н о р А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.

ОДНО ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С. А. ЧАПЛЫГИНА

Ю. И. ЦЫБИЗОВ

(Куйбышев)

В теоретических исследованиях ряда газодинамических задач большую роль играет плоскость годографа, где уравнения в переменных компонент скорости — линейные. В этих исследованиях основную роль играет уравнение Чаплыгина для функции тока ψ . Чаплыгиным [1] было получено общее решение уравнения движения в плоскости годографа. Известны также частные точные решения [2] годографа: радиальное течение, спиральное течение и т. д. Ниже рассматривается частное решение уравнения Чаплыгина.

1. Частное решение уравнения Чаплыгина. Уравнения плоского установившегося безвихревого движения совершенного газа имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости w на оси координат x и y , ρ — плотность потока. Вводя функцию тока ψ и используя в качестве независимых переменных скорость потока w и угол наклона скорости к оси потока θ , систему (1.1), приводим [1, 2] к основному уравнению для функции тока ψ сжимаемого течения в плоскости годографа

$$w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + w(1 + M^2) \frac{\partial \psi}{\partial w} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \left(\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

В уравнении (1.2) удобно заменить переменную w на τ , положив

$$\tau = \frac{w^2}{w_{\max}^2} = \frac{k-1}{k+1} \frac{w^2}{a_*^2} = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \quad \left(M^2 = \frac{1}{k-1} \frac{2\tau}{1-\tau} \right) \quad (1.3)$$

Здесь M — число Маха, k — показатель адиабаты, a_* — критическая скорость звука, w_{\max} — максимальная скорость потока. Уравнение (1.2) приведет к виду

$$4\tau^2(1-\tau) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \tau\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 4\tau \left(1 + \frac{2-k}{k-1} \tau\right) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0 \quad (1.4)$$

Следуя Чаплыгину, будем искать решение уравнения (1.4) в виде

$$\psi = \tau^{1/2n(k)} f(\tau) \cos n(k)\theta \quad (1.5)$$

Здесь $f(\tau)$ — коэффициент, учитывающий влияние сжимаемости; $n(k)$ — показатель степени, являющийся функцией только показателя адиабаты k .

Подставляя (1.5) в (1.4), получим дифференциальное уравнение для f

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left[(n+1) - \left(n+1 - \frac{1}{k-1} \right) \tau \right] \frac{df}{d\tau} + \frac{n(n+1)}{2(k-1)} f = 0 \quad (1.6)$$

Это уравнение представим в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{df}{d\tau} \tau(1-\tau) \right] = \frac{df}{d\tau} \left[\tau(n-1) - \frac{\tau}{k-1} - n \right] - \frac{n(n+1)}{2(k-1)} f \quad (1.7)$$

Пусть выполняется условие

$$\frac{d}{d\tau} \left[\tau(n-1) - \frac{\tau}{k-1} - n \right] = -\frac{n(n+1)}{2(k-1)}$$

Тогда, дифференцируя левую часть, можно найти зависимость показателя степени n в функции показателя адиабаты

$$n^2 - n(1-2k) - 2k = 0$$

Отсюда $n_1 = 1$, $n_2 = -2k$. В случае $n = 1$ имеем два частных решения, которые были исследованы Ринглем, Темплом и Ярвудом [2, 3].

В случае $n = -2k$ равенство (1.7) принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{df}{d\tau} \tau(1-\tau) \right] = \frac{d}{d\tau} \left\{ f \left[2k - \frac{\tau}{k-1} - \tau(1+2k) \right] \right\} \quad (1.8)$$

Решая (1.8), получим

$$f = c\tau^{2k}(1-\tau)^{k/(k-1)} \quad (1.9)$$

Таким образом, функция тока, представляющая собой частное решение уравнения (1.6), с учетом соотношений (1.3), имеет вид

$$\psi = c\lambda^{2k} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{k/(k-1)} \cos 2k\theta \quad (1.10)$$

где c — произвольная постоянная. Линии тока $\psi = \text{const}$, определяемые соотношением (1.10), построены в плоскости годографа (фиг. 1) (рассматривается случай $c > 0$).

Линии тока 2 и 3 проходят из дозвуковой области ($\lambda < 1$) в сверхзвуковую ($1 < \lambda < \sqrt{(k+1)/(k-1)}$). Линия тока 1 вся находится в сверхзвуковой области.

2. **Предельная линия.** Предельная линия получается при преобразовании функции тока ψ и потенциала скорости ϕ из физической плоскости в плоскость годографа. Отметим соотношения плоскости годографа

$$\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{1}{w} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad - \frac{\rho_0}{\rho} (1 - M^2) \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial w} \quad (2.1)$$

где ρ_0 — плотность, определяемая по заторможенным параметрам. Условие существования предельной линии (равенство нулю якобиана) имеет вид

$$j = \frac{\partial \phi}{\partial w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial w} = - \frac{\rho_0}{\rho} w \left[(1 - M^2) \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial w} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.2)$$

Приравняв нулю якобиан (2.2), заменяя переменную w на λ из равенства (1.3) и имея в виду, что

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 - \lambda^2 \frac{k-1}{k+1} \right]^{-\frac{1}{k-1}}, \quad 1 - M^2 = \frac{1 - \lambda^2}{[1 - \lambda^2 (k-1)/(k+1)]} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{2k}{k+1} \left[1 - \frac{\lambda^2 (k-1)}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1}} \lambda^{2k-1} (k+1 - k\lambda^2) \cos 2k\theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = - 2k \lambda^{2k} \left[1 - \frac{\lambda^2 (k-1)}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \sin 2k\theta$$

получим

$$\left[\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 (k-1)/(k+1)} \right] \left\{ - \frac{1}{\lambda} 2k \lambda^{2k} \left[1 - \frac{\lambda^2 (k-1)}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \sin 2k\theta \right\}^2 + \left\{ \frac{2k}{k+1} \lambda^{2k-1} \left[1 - \frac{\lambda^2 (k-1)}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1}} (k+1 - k\lambda^2) \cos 2k\theta \right\}^2 = 0 \quad (2.4)$$

Решая (2.4) относительно угла $2k\theta$, находим уравнение предельной линии в плоскости годографа, которая, как видно из (2.4), существует только в случае $\lambda > 1$, т. е. в сверхзвуковой области

$$\operatorname{ctg} 2k\theta = \pm \frac{(\lambda^2 - 1)^{1/2} [1 - \lambda^2 (k-1)/(k+1)]^{1/2}}{1 - \lambda^2 k / (k+1)} \quad (2.5)$$

В плоскости годографа фиг. 1 предельная линия обозначена пунктиром.

3. **Физическая плоскость.** Пространственные координаты x и y , соответствующие переменным годографа w и θ в форме функции комплексного переменного имеют вид [3]

$$dz = dx + i dy = e^{i\theta} \left[\left(\frac{1}{w} \frac{\partial \phi}{\partial w} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) dw + \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta \right] \quad (3.1)$$

Заменяя переменную w на λ и подставляя соотношения (2.3) в (3.1), получим

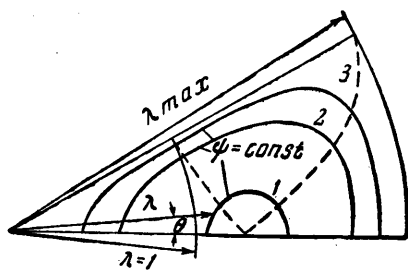
$$dz = dx + i dy = (\cos \theta + i \sin \theta) \left\{ \frac{2k}{k+1} \lambda^{2k-1} (k+1 - k\lambda^2) \cos 2k\theta d\theta - \right. \\ \left. - 2k (\lambda^2 - 1) \lambda^{2k-2} \sin 2k\theta d\lambda + i \frac{2k}{k+1} \lambda^{2k-2} (k+1 - k\lambda^2) \cos 2k\theta d\lambda - \right. \\ \left. - i 2k \lambda^{2k-1} \left[1 - \frac{\lambda^2 (k-1)}{k+1} \right] \sin 2k\theta d\theta \right\} = 0 \quad (3.2)$$

При переходе из плоскости годографа в физическую возникают трудности, связанные с возможностями представления интегралов через элементарные функции для различных показателей адиабаты k .

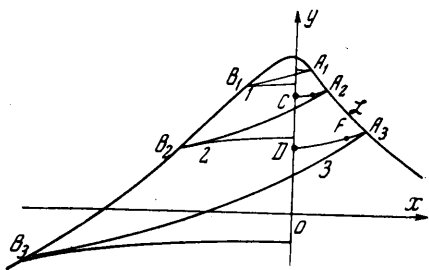
Так, например, точное решение Ринглеба [3] интегрируется при $k = 1.4$. Выражение (3.2) можно проинтегрировать для $k = 1.5$. Переменные x и y для этого частного случая записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} [6 \sin 2\theta \lambda^2 - 1.8 \lambda^4 \sin 2\theta - 1.2 \lambda^4 \sin 3\theta \cos \theta] \\ y &= \frac{1}{4} [6 \cos 2\theta \lambda^2 - 1.8 \lambda^4 \cos 2\theta - 1.2 \lambda^4 \sin 3\theta \sin \theta] \end{aligned} \quad (3.3)$$

На фиг. 2 представлены линии тока $\psi = \text{const}$, в физической плоскости течения соответствующие решению (1.10) в плоскости годографа. Линии 1, 2, 3 соответствуют линиям тока в плоскости годографа — 1, 2, 3. Предельная линия L в физической плоскости построена по координатам (3.3) по значениям λ и θ , удовлетворяющим соотношению (2.4).



Фиг. 1



Фиг. 2

В плоскости годографа каждая линия тока 1, 2 и 3 пересекает предельную линию в двух точках. В физической плоскости этим точкам соответствуют по две точки вихря A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 (фиг. 2).

Две соседние криволинейные линии тока CE и DF можно рассматривать как твердые стенки, которые не достигают предельной линии L . Тогда этот случай иллюстрирует пример гладкого трансзвукового течения в канале.

Поступило 14 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Гостехиздат, 1949.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Изд. иностр. литер., 1961.
3. Бэй Ш и -и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. Изд. иностр. литер., 1962.

АПРОКСИМИРУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Ф. С. ЧУРИКОВ (Орджоникидзе)

Известно, что нелинейная система уравнений плоского стационарного изэнтропического потенциального течения газа допускает линеаризацию и преобразование к одному эквивалентному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Это уравнение для случая совершенного газа имеет вид [1]:

$$\frac{1 - \tau^2}{\tau^2(1 - \alpha\tau^2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{\tau(1 - \tau^2)}{\tau^2(1 - \alpha\tau^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0 \quad (0.1)$$

$$(\tau = w/c_k, w = \sqrt{u^2 + v^2}, \alpha = (\gamma - 1)/(\gamma + 1); \gamma = c_p/c_v)$$

Здесь θ — угол, образованный вектором скорости с осью x , u , v — проекции скорости на оси x , y ; c_k — критическая скорость, постоянная во всей области течения.