О РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРА ИЗ УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. И. ЛЕОНОВ

(Москва)

В работе [1] на примере плоского течения с точкой застоя были выяснены основные реологические соотношения для движения упруго-вязких сред и тиксотропной упруго-вязкой среды в поле постоянного продольного градиента скорости. Результаты работы показали, что, в отличие от деформации простого сдвига, в случае деформации одноосного растяжения при достижении скорости деформации, превосходящей некоторое критическое значение, стационарное течение жидкости невозможно и жидкость будет испытывать квазихрупкое разрушение. При этом аппроксимация реологических соотношений уравнением Максвелла дает хорошее качественное согласие с поведением сред более сложной реологической структуры. Ниже исследуются кинематические и динамические характеристики при движении жидкости в поле не постоянного во времени продольного градиента скорости и исследуются некоторые частные случаи на примере максвелловской жидкости. Результаты работы могут быть применены при анализе технологических процессов формования и вытяжки волокон, а также для определения реологических параметров полимеров методом растяжения, предложенным В. А. Каргиным и Т. И. Соголовой [2].

1. Будем предполагать, что реологическое поведение несжимаемой упруго-вязкой жидкости описывается уравнениями, предложенными в работе Олдройда [3]

$$p'^{ik} = 2\int\limits_{-\infty}^{t} \psi(t-t')\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x^k}{\partial x'^n}\dot\gamma^{mn}(x',t')\,dt', \qquad \gamma^{mn\cdot} = {}^1/_2(\nabla^m v^n + \nabla^n v^m) \tag{1.1}$$

$$p'^{ik} = p^{ik} + g^{ik}p \tag{1.2}$$

(здесь p^{ik} — компоненты тензора напряжений, g^{ik} — компоненты фундаментального метрического тензора, p — изотропное давление, $\gamma^{mn\cdot}$ — компоненты тензора скоростей деформаций, v^m — компоненты вектора скорости, ∇^n — символ контравариантного дифференцирования, x'^k — функция смещения, удовлетворяющие уравнениям с условиями Коши

$$\frac{\partial x'^k}{\partial t} + v^m\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = 0, \qquad x'^k(x^m, t, t')|_{t=t'} = x^k \tag{1.3}$$

В уравнении (1.1) $\psi(t)$ — функция релаксации, убывающая, положительно определенная на интервале $t \geqslant 0$, причем $\psi(0) < \infty$, $\psi(\infty) = 0$. Уравнения (1.1) — (1.3) совместно с уравнениями движения среды в напряжениях и уравнением неразрывности

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k\nabla_k v^i\right) = F^i + \nabla_k p^{ik}, \qquad \nabla_i v^i = 0 \tag{1.4}$$

(здесь ρ — плотность, F^i — компонента массовой силы) представляют собой замкнутую систему уравнений.

Рассмотрим задачу о растяжении цилиндрического столба упруго-вязкой жидкости, имеющей в недеформированном состоянии радиус R_0 и длину l_0. Введем цилиндрические координаты r, φ, z, направив ось z по оси цилиндра вертикально вверх. Пусть один конец жидкого цилиндра ($z = 0$) неподвижен, а на втором конце ($z = l$) в момент $t = 0$ прикладывается некоторое усилие Ф (t). Введем физические компоненты вектора скорости v_r, v_φ, v_z (причем в силу осевой симметрии $v_\varphi = 0$), для которых уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.5}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$v_z = \varkappa(t)\, z, \qquad v_r = -{}^1\!/_2\, r\varkappa(t) \tag{1.6}$$

где $\varkappa(t)$ — продольный градиент скорости, причем $\varkappa(t) = 0$ при $t < 0$. Очевидно, что функции, введенные в (1.6), удовлетворяют уравнению (1.5).

В рассматриваемой системе координат компоненты фундаментального метрического тензора имеют вид

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ik} = 0 \quad (i \neq k)$$

Здесь и далее принята система индексации $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$. «Физические» компоненты тензора скоростей деформации суть:

$$\gamma_{rr}^{\cdot} = -{}^1\!/_2\varkappa(t), \quad \gamma_{\varphi\varphi}^{\cdot} = -{}^1\!/_2\varkappa(t), \quad \gamma_{zz}^{\cdot} = \varkappa(t)$$

$$\gamma_{rz}^{\cdot} = 0, \quad \gamma_{\varphi r}^{\cdot} = 0, \quad \gamma_{z\varphi}^{\cdot} = 0$$

Контравариантные компоненты тензора скоростей деформации равны

$$\gamma^{11\cdot} = -\frac{\varkappa(t)}{2}, \quad \gamma^{22\cdot} = -\frac{\varkappa(t)}{2r^2}, \quad \gamma^{33\cdot} = \varkappa(t), \quad \gamma^{ik\cdot} = 0 \quad (s \neq k) \tag{1.7}$$

Очевидно, что в данном случае контравариантные компоненты вектора скорости совпадают с «физическими».

Решая уравнения (1.3) для смещений с учетом условий Коши, получим

$$r' = r\exp\left[\frac{1}{2}\int_{t'}^{t} \varkappa(\xi)\, d\xi\right], \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z\exp\left[\int_{t'}^{t} \varkappa(\xi)\, d\xi\right] \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.1), с учетом соотношений между «физическими» и контравариантными компонентами тензора p'^{ik}

$$p_{ii}' = g_{ii} p'^{ii}$$

получим для ненулевых «физических» компонент тензора p'^{ih}

$$\begin{aligned} p_{rr}' &= -\int_0^t \psi(t-\tau)\,\varkappa(\tau)\exp\left[-\int_\tau^t \varkappa(\xi)\, d\xi\right] d\tau \\ p_{\varphi\varphi}' &= -\int_0^t \psi(t-\tau)\,\varkappa(\tau)\exp\left[-\int_\tau^t \varkappa(\xi)\, d\xi\right] d\tau \\ p_{zz}' &= 2\int_0^t \psi(t-\tau)\,\varkappa(\tau)\exp\left[2\int_\tau^t \varkappa(\xi)\, d\xi\right] d\tau \end{aligned} \tag{1.9}$$

Из (1.2) следует, что «физические» компоненты тензора напряжений определяются выражениями

$$p_{rr} = -p + p_{rr}', \quad p_{\varphi\varphi} = -p + p_{\varphi\varphi}', \quad p_{zz} = -p + p_{zz}' \tag{1.10}$$

Подставляя (1.6), (1.9) и (1.10) в выражения (1.4), написанные для «физических» компонент тензора напряжений получим уравнения для изотропного давления

$$\frac{\rho r}{2}\left(-\varkappa' + \frac{\varkappa^2}{2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \rho z(\varkappa' + \varkappa^2) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \qquad \left(\varkappa' = \frac{\partial \varkappa}{\partial t}\right)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$p(r, z, t) = p_0(t) - \rho\left[gz + (\varkappa^2 + \varkappa')\frac{z^2}{2} + \left(\frac{\varkappa^2}{2} - \varkappa'\right)\frac{r^2}{4}\right] \tag{1.11}$$

В выражении (1.11) слагаемое в правой части, заключенное в квадратные скобки $[p_d]$, обусловлено действием динамических факторов, второе слагаемое $p_0(t)$ обусловлено действием статических факторов. Если пренебречь влиянием поверхностного натяжения, то величина $p_0(t)$ может быть определена из соображений равенств величины p_{rr} динамической части давления p_d при $r = R(t)$, где $R(t)$ — наружный радиус жидкого цилиндра. Поскольку из (1.9) следует, что компоненты тензора p_{ik}' не зависят от пространственных координат, то последнее условие будет выполнено, если $p_{rr} = p_d$, откуда следует, что

$$p_0(t) = p_{rr}' = -\int_0^t \psi(t-\tau)\varkappa(\tau)\exp\left[-\int_\tau^t \varkappa(\xi)\,d\xi\right] \tag{1.12}$$

Определим теперь границы жидкого цилиндра: его радиус $R(t)$ и длину $l(t)$. Из очевидных соотношений

$$R(t) - R_0 = \int_0^t v_r(R(\tau), \tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t \varkappa(\tau)R(\tau)\,d\tau$$

$$l(t) - l_0 = \int_0^t v_z(l(\tau), \tau)\,d\tau = \int_0^t \varkappa(\tau)l(\tau)\,d\tau$$

получим

$$R(t) = R_0\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau\right], \qquad l(t) = l_0\exp\left[\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.13}$$

Используя (1.13), легко проверить выполнение условия сохранения объема при растяжении жидкого цилиндра $R^2(t)l(t) = R_0^2 l_0$.

Заметим, что принятые условия деформирования (распределение скоростей (1.7) и, как следствие этого,— соотношения для границ жидкого цилиндра (1.13)) являются идеализированными и справедливы лишь на достаточном удалении от краев. Определим соотношение между скоростью растяжения свободного конца цилиндра $U(t)$ и градиентом скорости $\varkappa(t)$. Из граничного условия на свободном конце стержня следует

$$U(t) = v_z(l(t), t) = \varkappa(t)l(t) = l_0\varkappa(t)\exp\left[\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.14}$$

Интегрируя (1.15), имеем

$$l_0 + \int_0^t U(\tau)\,d\tau = l_0\exp\left[\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.15}$$

Откуда

$$\varkappa(t) = U(t)\left[l_0 + \int_0^t U(\tau)\,p\tau\right]^{-1} \tag{1.16}$$

Вычислим теперь осевую силу $\Phi(t)$, действующую на свободный конец цилиндрической струи при растяжении ее с заданной скоростью деформации $\varkappa(t)$

$$\Phi(t) = 2\pi\int_0^{R(t)} p_{zz}(l(t), r, t)\,r\,dr$$

Интегрируя и используя выражения (1.9) — (1.15), получим

$$\Phi(t) = \pi\rho \left\{gR_0^2 l_0 + \frac{1}{2}(\varkappa^2 + \varkappa') l_0^2 R_0^2 \exp\left[\int_0^t \varkappa(\tau)\, d\tau\right] + \right.$$
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{\varkappa^2}{2} - \varkappa'\right) R_0^4 \exp\left[-2\int_0^t \varkappa(\tau)\, d\tau\right]\right\} + \tag{1.17}$$
$$+ \pi R_0^2 \exp\left[-\int_0^t \varkappa(\xi)\, d\xi\right] \int_0^t \psi(t-\tau)\varkappa(\tau) \left\{2\exp\left[2\int_\tau^t \varkappa(\xi)\, d\xi\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-\int_\tau^t \varkappa(\xi)\, d\xi\right]\right\} d\tau$$

Соотношения (1.16) и (1.17) определяют собой искомую связь между силой, приложенной к свободному концу жидкого цилиндра, и скоростью этого конца.

2. Рассмотрим частные случаи продольной деформации упруго-вязкого цилиндра для случая максвелловской жидкости

$$\psi(t) = Ge^{-st}, \qquad s = G / \eta = 1 / \theta \tag{2.1}$$

(G — модуль Гука, η — вязкость, θ — время релаксации), когда кинематические характеристики ($\varkappa(t)$ или $U(t)$) являются заданными.

1) Пусть $\varkappa(t) = \varkappa_0 = \text{const}$. Из (2.1) следует, что скорость растяжения свободного конца стержня, необходимая для поддержания постоянной скорости деформации, равна

$$U(t) = l_0 \varkappa_0 e^{\varkappa_0 t} \tag{2.2}$$

а сила, необходимая для его растяжения, есть

$$\Phi(t) = \pi\rho\left(gR_0^2 l_0 + {}^1/_2\, \varkappa_0^2 R_0^2 l_0^2 e^{\varkappa_0 t} + {}^1/_{16}\, \varkappa_0^2 R_0^4 e^{-2\varkappa_0 t}\right) +$$
$$+ \pi R_0^2 \varkappa_0 e^{-\varkappa_0 t} G\left[2\frac{e^{(2\varkappa_0 - s)t} - 1}{2\varkappa_0 - s} - \frac{1 - e^{-(\varkappa_0 + s)t}}{\varkappa_0 + s}\right] \tag{2.3}$$

Если пренебречь инерционным членом в (2.3), то при $\varkappa_0 \to s$ осевая сила $\Phi(t)$ ограничена и имеет конечный предел при $t \to \infty$. Однако наличие инерционного члена в равенстве (2.3) делает осевую силу неограниченной для данного случая деформации.

2) Пусть $U(t) = \text{const} = U_0$, т. е. рассматривается случай, когда свободный конец жидкого цилиндра растягивается с постоянной скоростью. Величина $\varkappa(t)$, определяемая из (1.7), равна

$$\varkappa(t) = \frac{U_0}{l_0 + U_0 t} = \frac{1}{t + l_0 / U_0} \tag{2.4}$$

т. е. скорость деформации $\varkappa(t)$ убывает от $\varkappa(0) = U_0 / l_0$ при $t = 0$ до нуля при $t \to \infty$.

На основании (1.16) имеем

$$l(t) = l_0 + U_0 t \tag{2.5}$$

Вычислим силу $\Phi(t)$, необходимую для поддержания постоянной скорости растяжения свободного конца цилиндра. Подставляя (2.4) в равенство (1.17), получим

$$\Phi(t) = \pi\rho\left[gR_0^2 l_0 + \frac{3}{16}\frac{R_0^4 U_0^2}{l_0^2}\frac{1}{(1 + U_0 t / l_0)^4}\right] +$$
$$+ 2\pi R_0^2 \frac{U_0}{l_0} G(1 + U_0 t / l_0) \int_0^t \frac{e^{-s(t-\tau)}}{(1 + U_0\tau / l_0)^3} d\tau - \frac{\pi R_0^2 \eta U_0 / l_0}{(1 + U_0 t / l_0)^2}(1 - e^{-st}) \tag{2.6}$$

Нетрудно показать, что асимптотическое выражение для функции $\Phi(t)$ при $t \to \infty$ имеет вид

$$\Phi(t) \approx \pi\rho\left[gR_0^2 l_0 + \frac{3}{16}\frac{R_0^4 U_0^2}{l_0^2}\frac{1}{(1 + U_0 t / l_0)^4}\right] + \eta\frac{\pi R_0^2 U_0 / l_0}{(1 + U_0 t / l_0)^2} \quad \text{при } t \to \infty \tag{2.7}$$

Это выражение соответствует рассматриваемому случаю течения неньютоновской вязкой жидкости с постоянной вязкостью η. Легко показать, что в рассматриваемом случае деформации при $t \to \infty$ реологические соотношения (1.1) переходят в закон Ньютона, причем это же выполняется и для реологических соотношений, характеризующих тиксотропную упруго-вязкую жидкость, введенных нами в [4]. Эти результаты являются физически очевидными, так как рассматриваемому случаю деформирования соответствует уменьшающаяся до нуля при $t \to \infty$ скорость деформации. Однако при весьма малых скоростях деформации реологические соотношения переходят в известные уравнения линейной теории вязко-упругости, которые для упруго-вязкой жидкости дают в предел при $t \to \infty$ закон Ньютона.

3) Рассмотрим теперь задачу об определении скорости $U(t)$ свободного конца растягиваемого упруго-вязкого цилиндра при задании силы $\Phi(t)$, действующей на этот конец. Задача сводится к решению сильно нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.18) относительно неизвестной функции $\varkappa(t)$. Определив из этого уравнения $\varkappa(t)$, можно из (1.15) легко найти $U(t)$. Исследуя движение стержня из невозмущенного состояния, будем иметь в качестве начального условия $\varkappa(0) = 0$.

Рассмотрим качественное поведение решения в случае максвелловской жидкости ($\psi(t)$ определяется равенством (2.1)) при постоянной силе $\Phi(t) = \Phi_0$, приложенной к свободному концу цилиндра. При достаточно малых t $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ решение $\varkappa(t)$ будет, очевидно, описываться линейным интегро-дифференциальным уравнением. С увеличением t вязко-упругие члены в уравнении (1.17) будут преобладать над инерционными в некоторой области значений t $(t_1 \lesssim t \lesssim t_2)$, если вязкость достаточно велика. Однако при очень больших t $(t \gg t_2)$, как следует из п. 2 и показывается ниже, поведение $\varkappa(t)$ можно оценить, учитывая только инерционные члены в уравнении (1.17), так как они оказываются преобладающими при достаточно большой степени вытяжки.

Определим асимптотическое решение $t \to 0$, когда можно пользоваться линейным уравнением (это же решение, естественно, может быть использовано и при весьма малых значениях растягивающей силы $\Phi_0 \ll \pi R_0^2 G$). Линеаризованное уравнение (1.17) имеет вид

$$f_0 = \frac{\rho}{G}\left[gl_0 + \frac{\varkappa'}{2}(l_0^2 - {}^1/_4 R_0^2)\right] + \int_0^t e^{-s(t-\tau)}\varkappa(\tau)\,d\tau \quad f_0 = \frac{\Phi_0}{\pi R_0^2 G} \tag{3.1}$$

Преобразуя это уравнение по Лапласу (p — параметр преобразования) с учетом условия $\varkappa(0) = 0$, получим линейное алгебраическое уравнение относительно $K(p)$, изображения $\varkappa(t)$, решение которого имеет вид

$$K(p) = \frac{(f_0 - gl_0\rho / G)(p + s)}{p\,[(p + s)(l_0^2 - {}^1/_4 R_0^2)\rho / 2G + 1]}$$

Корни знаменателя суть

$$p_0 = 0, \quad p_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm i\beta, \quad \beta = \left[\frac{2G}{\rho(l_0^2 - {}^1/_4 R_0^2)} - \frac{s^2}{4}\right]^{1/2} \tag{3.2}$$

Используя формулу обращения, после некоторых вычислений получим

$$\varkappa(t) = s\left(f_0 - \frac{\rho}{G}gl_0\right)\left\{1 - e^{-1/_2 st}\left[\left(\frac{s}{2} - \frac{2\eta}{\rho(l_0^2 - {}^1/_4 R_0^2)}\right)\right]\frac{\sin\beta t}{\beta} + \cos\beta t\right\} \tag{3.3}$$

Определим теперь границы применимости формулы (3.3). Для этого заметим, что в реальных расплавах и концентрированных растворах полимеров $\eta \approx 10^6$ *пз*, $G \approx 10^6$ *дин/см*^{2}, $\rho \approx 1$ *г/см*^{3}, $s \approx 10^{-1}$ *сек*$^{-1}$. Если $l_0 \gg R_0$, что и будем предполагать, что из (3.2) следует, что $\beta = \sqrt{2}t_0^{-1}$, где t_0 — время распространения упругих волн в стержне, причем предполагаем, что $t_0 \ll 1/s$. Из (1.17) следует, что линеаризованное уравнение (3.1) справедливо в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$, для которого

$$\exp\left[\int_0^t |\varkappa(t)|\,dt\right] - 1 \leqslant \varepsilon$$

где ε — допускаемая погрешность. Отсюда следует с учетом приведенных выше оценок для параметров, что

$$t_1 \approx t_0\varepsilon\,(f_0 - \rho g l_0/G)^{-1} \tag{3.4}$$

Заметим, что (3.4) не противоречит очевидному факту, что при достаточно малых нагрузках можно использовать линеаризованное решение в течение довольно длительного промежутка времени.

Рассмотрим теперь оценку для решения во второй из указанных областей, когда вязко-упругие члены преобладают над инерционными. Отбрасывая инерционные члены в (1.18) и полагая $\psi(t)$ соответствующей (2.1), получим уравнение для $\varkappa(t)$

$$f_0 = \exp\left[-\int_0^t \varkappa(\xi)\,d\xi\right]\int_0^t \varkappa(\tau)\,e^{-s(t-\tau)}\left\{2\exp\left[2\int_\tau^t \varkappa(\xi)\,d\xi\right] - \right.$$

$$\left. - \exp - \int_\tau^t \varkappa(\xi)\,d\xi\right]\right\}d\tau \qquad \left(f_0 = \frac{\Phi_0}{\pi R_0^2 G}\right) \tag{3.5}$$

Заметим теперь, что уравнение (3.5) справедливо при $t \gtrsim t_1$. При $t \lesssim t_1$ можно пользоваться линеаризованным уравнением. Рассмотрим асимптотическое решение уравнения (3.5) при больших t (оно будет справедливо, если значение t_2, ограничивающее сверху область применимости безынерционного решения, достаточно велико). Представляя интегралы в (3.5) в виде суммы интегралов от 0 до t_1 и от t_1 до t, линеаризуя правую часть при $\tau < t_1$ и отбрасывая второе слагаемое подынтегрального выражения в фигурных скобках, малое по сравнению с первым при $\tau > t_1$, получим после элементарных преобразований

$$(f_0 e^{st} - f_1)\,e^{-x(t)} = 2\int_{t_1}^t \varkappa(\tau)\,e^{s\tau - 2x(\tau)} \quad x(t) = \int_{t_1}^t \varkappa(\tau)\,d\tau, \qquad f_1 = \int_0^{t_1} \varkappa(\tau)\,e^{s\tau}d\tau$$

Дифференцируя это соотношение и обозначая $\varkappa = x'$, получим уравнение для $x(t)$ с условием $x(t_1) = 0$

$$x'(f_0 + 2e^{-x} - f_1 e^{-st}) = f_0 s$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(t_1) = 0$, имеет вид

$$s(t - t_1) = x + \varphi(x) + \ln\left[1 - \frac{f_1}{2}e^{-st_1}(1 - e^{-\varphi(x)})\right]\varphi(x) = \frac{2(1 - e^{-x})}{f_0} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что асимптотическое решение справедливо, если $s(t - t_1) \gg 2f_0^{-1}$. При достаточно больших t выражение (3.6) можно представить в виде

$$x \approx s(t - t_1) - 2/f_0$$

откуда следует, что асимптотическое поведение функции при больших t имеет вид

$$\varkappa(t) = s + O(e^{-st}) \tag{3.7}$$

При этом с увеличением безразмерной нагрузки f_0 асимптотическое решение будет практически совпадать с точным решением при меньших значениях t. Заметим также, что результат (3.7) хорошо коррелирует с результатами п. 2, где исследовалась деформация цилиндра в режиме $\varkappa = \text{const}$.

Выражение (3.7) получено в пренебрежении инерционными членами в (1.18). Оценивая инерционный член F° в (1.18) при больших t при помощи (3.7), получим

$$\frac{F}{\Phi} \approx \frac{\pi\rho}{2\Phi_0} (\varkappa^2 + \varkappa') l_0^2 R_0^2 \exp\left[\int_0^t \varkappa(\tau)\, d\tau\right] \approx \frac{\rho l_0^2}{2Gf_0} s^2 e^{st} = \frac{t_0^2 s^2}{2f_0} e^{st} \qquad \left(f_0 = \frac{\Phi_0}{\pi}\right)$$

Очевидно, что инерционным членом можно вполне пренебречь для значений t, удовлетворяющих неравенству $F^\circ / \Phi_0 \leqslant \varepsilon$, где ε — ранее введенная допускаемая погрешность. Отсюда следует, что значение t_2, ограничивающее сверху область применимости безынерционного решения, определяется равенством

$$t_2 = \frac{1}{s} \ln \frac{2f_0\varepsilon}{t_0^2 s^2} \tag{3.8}$$

Например, для $f_0 = 0.1$, $l_0 = 2$ *см*, $\varepsilon = 0.05$, $s = 0.1$ *сек*$^{-1}$, $G = 10^6$ *дин/см*^{2}, $\rho = 1$ *г/см*^{3} имеем $t_2 \approx 130$ *сек*. Используя (1.16), можно получить выражение для скорости растягиваемого конца цилиндра

$$U(t) \approx s l_0 e^{st} \qquad (t_1 \leqslant t < t_2) \tag{3.9}$$

При $t \geqslant t_2$ необходимо пользоваться другими формулами для определения $\varkappa(t)$. В этом случае инерционные члены в (1.18) будут преобладающими, отсюда следует, что приближенное уравнение для $\varkappa(t)$

$$\Phi_0 \approx \pi\rho \left\{g R_0^2 l_0 + \frac{1}{2}(\varkappa^2 + \varkappa') l_0 R_0^2 \exp\left[\int_0^t \varkappa(\tau)\, d\tau\right]\right\} =$$

$$= \pi\rho \left(g R_0^2 l_0 + \frac{l_0 R_0^2}{2} U'(t)\right)$$

решение которого имеет вид

$$U(t) \approx 2\frac{\Phi_0 - Mg}{M} t + U(t_2) \tag{3.10}$$

Здесь M — масса жидкого цилиндра. В рассматриваемом случае $\varkappa(t)$ убывает при $t \to \infty$, в чем легко убедиться при подстановке (3.10) в (3.17).

Таким образом, обнаружено теоретически существование совершенно различных механизмов движения при растяжении упруго-вязких жидкостей. Полученные качественные и количественные закономерности могут представить интерес как для исследования реологических свойств расплавов и концентрированных растворов полимеров, так и для анализа технологических процессов волокнообразования и потому требуют строгой экспериментальной проверки.

Поступило 25 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов А. И., Виноградов Г. В. О реологических зависимостях при движении упруго-вязкой среды в поле постоянного продольного градиента скорости. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 4.
2. Каргин В. А., Соголова Т. И. Разработка метода изучения истинного процесса течения в полимерах. Ж.Ф.Х., 1949, т. 23, № 5.
3. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological eguations of state. Proc. Roy. Soc. (A), 1950, V. 200, № 1063.
4. Леонов А. И. Теория тиксотропии упруго-вязких сред с непрерывным распределением времен релаксации. ПМТФ, 1964, № 4.