

## ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ НЕПОДВИЖНЫМ И ОБДУВАЕМЫМ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

Л. А. ДОРФМАН

(Ленинград)

§ 1. Рассмотрим задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости в пространстве между вращающейся неограниченной плоскостью и параллельной ей неподвижной плоскостью, сквозь которую подается с постоянной скоростью дополнительная жидкость (фиг. 1).

Для расчета течения в зазоре между неподвижной и вращающейся плоскостями необходимо решить систему уравнений Навье-Стокса. Эти уравнения для установившегося режима принимают с учетом осевой симметрии в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  следующий вид:

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi v_r}{r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $v_r, v_\varphi$  и  $v_z$  — радиальная, окружная и осевая составляющие скорости соответственно,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

Составляющие  $v_r$  и  $v_z$  связаны, кроме того, уравнением неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Для тождественного удовлетворения этому уравнению введем функцию тока  $\psi$ , так, что

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.3)$$

Как легко убедиться, поставленная задача является автомодельной.

Действительно, если ввести функции  $f(\zeta)$  и  $G(\zeta)$  такие, что

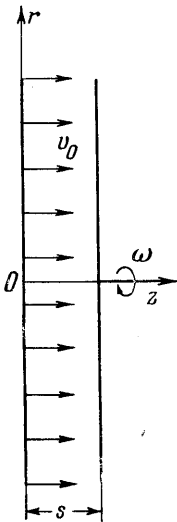
$$\psi = \omega s r^2 f(\zeta), \quad v_\varphi = r \omega G(\zeta), \quad \zeta = z/s \quad (1.4)$$

где  $s$  — расстояние между неподвижной и вращающейся стенками, то после подстановки (1.3), (1.4) в систему (1.1) получим из первых двух уравнений систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} f''' - 2ff'' + (f')^2 - G^2 + 2E &= 0 \\ \frac{1}{R} G'' - 2fG' + 2f'G &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

В то время как третье уравнение дает выражение для давления

$$\frac{p}{\rho} = 2\omega^2 s^2 \left( -f^2 + \frac{f'}{R} \right) + Er^2 \omega^2 \quad \left( R = \frac{s^2 \omega}{\nu} \right) \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Здесь  $R$  — число Рейнольдса,  $E$  — неизвестная константа. Радиальная и осевая составляющие скорости определяются через  $f(\zeta)$  по формулам

$$v_r = -\omega r f', \quad v_z = 2\omega s f \quad (1.7)$$

Граничные условия задачи примут вид на неподвижной стенке ( $\zeta = 0$ )

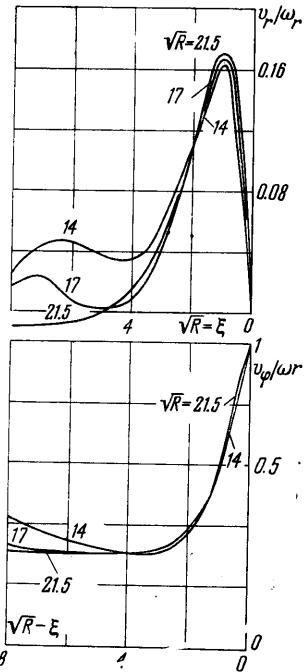
$$f(0) = \frac{v_0}{2\omega s} = k, \quad f'(0) = 0, \quad G(0) = 0 \quad (1.8)$$

на вращающейся стенке ( $\zeta = 1$ )

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 0, \quad G(1) = 1 \quad (1.9)$$

§ 2. Трудность численного решения краевой задачи (1.5), (1.8), (1.9) заключается в ее нелинейности. Для решения задачи методом проб и интерполяции необходимо знать в первом приближении значения всех необходимых граничных условий на одном из концов, чтобы приступить к решению задачи Коши. Для малых чисел  $R$  эти приближенные решения можно получить, применив разложение искомых величин в степенные ряды по  $R$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= f_0(\zeta) + Rf_1(\zeta) + R^2f_2(\zeta) + \dots \\ G(\zeta) &= g_0(\zeta) + Rg_1(\zeta) + R^2g_2(\zeta) + \dots \\ E &= E_0 + RE_1 + R^2E_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Граничным условиям удовлетворим за счет того, что потребуем

$$g_0(1) = 1, \quad f_0(0) = k$$

а в остальном положим  $f_n, f'_n, g_n$  равными нулю на обоих концах.

Подставив (2.1) в (1.5) и приравняв нулю коэффициенты при степенях  $R$ , получим с учетом граничных условий для  $f_n$  и  $g_n$  выражения

$$\begin{aligned} f_0 &= k, & g_0 &= \zeta, & E_0 &= \frac{3}{20} \\ f_1 &= \frac{1}{60}\zeta^5 - \frac{1}{20}\zeta^3 + \frac{1}{30}\zeta^2, & g_1 &= k\zeta(\zeta - 1), & E_1 &= -\frac{7}{60}k \\ f_2 &= \frac{1}{360}k(8\zeta^6 - 12\zeta^5 - 9\zeta^4 + 22\zeta^3 - 9\zeta^2) \\ g_2 &= -\frac{1}{180}(4\zeta^7 - 9\zeta^5 + \zeta^4 + \frac{8}{35}\zeta) + 2k^2(\frac{1}{3}\zeta^3 - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{6}\zeta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

По ним находим приближенные значения недостающих граничных условий. Как показывает расчет, в особенности при возрастающих числах  $R$  (и малых  $k$ ), определяющими для решения нелинейной краевой задачи (1.5), (1.8), (1.9) будут значения граничных условий вблизи вращающегося диска ( $\zeta = 1$ ), это соответствует тому физическому факту, что в данном случае вращение диска оказывает определяющее влияние на течение). Поэтому расчет велся, начиная с граничных условий при  $\zeta = 1$ . Из формул (2.2) первые приближения для недостающих граничных условий при  $\zeta = 1$  имеют вид

$$\begin{aligned} f''(1) &= \frac{1}{10}R + \frac{2}{45}kR^2 + \dots, & E &= \frac{3}{20} - \frac{7}{60}kR + \dots \\ G'(1) &= 1 + kR + (\frac{3}{700} + \frac{1}{3}k^2)R^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

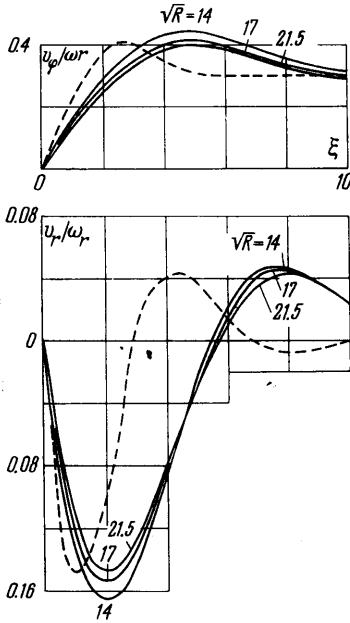
Они использовались для решения при малых  $R$  граничной задачи на ЭЦВМ методом проб и интерполяции. Для увеличенных значений  $R$  и  $k$  значения  $f''(1)$ ,  $G'(1)$  и  $E$  определялись в первом приближении по ранее найденным путем экстраполяции и т. д.

Заметим, что с ростом  $R$  увеличивается крутизна изменения величин  $f$ ,  $G$  и их производных от  $\xi$  вблизи стенок, ухудшается сходимость последовательных приближений. Во избежание этого вводится растяжение оси  $\xi$ , так что новая независимая переменная уже не связана с расстоянием  $z$  между стенками

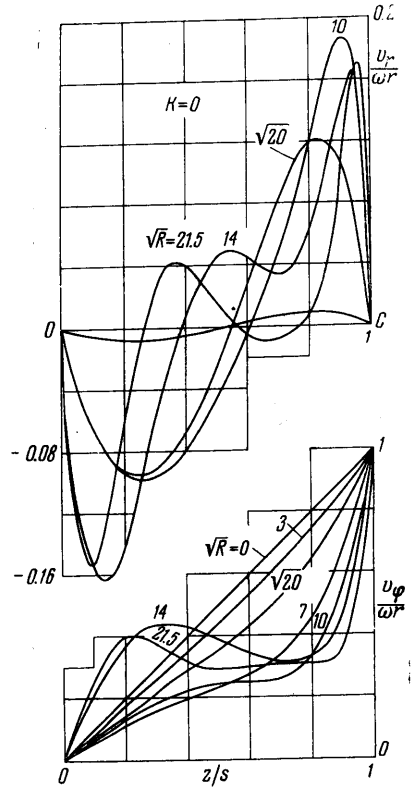
$$\xi = z \sqrt{\omega/\nu} = \zeta \sqrt{R} \quad (2.4)$$

и вводится новая функция

$$F = f \sqrt{R} \quad (2.5)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Тогда, обозначая дифференцирование по  $\xi$  точкой, получим из (1.5) систему дифференциальных уравнений

$$F''' - 2FF'' + (F')^2 - G^2 + 2E = 0, \quad G'' - 2FG' + 2F'G = 0 \quad (2.6)$$

с граничными условиями

$$G(0) = 0, \quad G(\sqrt{R}) = 1, \quad F(\sqrt{R}) = F'(\sqrt{R}) = F'(0) = 0 \\ F(0) = k\sqrt{R} \quad (2.7)$$

При этом

$$f'(\xi) = F(\xi), \quad G'(\xi) = G'(\xi)\sqrt{R}, \quad f''(\xi) = F''(\xi)\sqrt{R} \quad (2.8)$$

$$\tau_r = \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\mu r \omega}{s} f''(\xi) = \rho r \nu^{1/2} \omega^{3/2} F''(\xi), \quad \tau_\varphi = \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu r \omega}{s} G'(\xi) = \rho r \nu^{1/2} \omega^{3/2} G'(\xi)$$

Введение переменной  $\xi$  при большом безразмерном расстоянии  $\sqrt{R}$  между плоскостями подсказывается опытом решения соответствующих задач для диска, вращающегося в неограниченном пространстве (см., например, [1]). Численное решение дифференциальных уравнений (2.6) на ЭЦВМ проводилось методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага (модификация Мерсона [2]) с точностью  $10^{-7}$ . Программирование проведено А. З. Серазетдиновым.

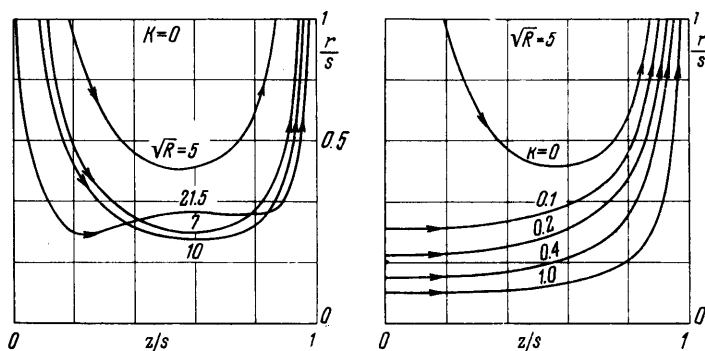
§ 3. Приведем результаты расчетов. Вначале рассмотрим случай отсутствия обдува ( $k = 0$ ). Заметим, что Гроне [8] изучал этот случай, однако провел расчеты только до  $\sqrt{R} = 10$ . Обращает на себя внимание (табл. 1) немонотонный характер измене-

Таблица 1

Случай  $k = 0$ 

$\sqrt{R}$	$F''(0)$	$F''(\sqrt{R})$	$G'(0)$	$G'(\sqrt{R})$	$E$
1	0.0665	0.1000	0.9987	1.0043	0.1496
3	0.1710	0.2932	0.3051	0.4343	0.1250
4	0.1777	0.3729	0.2006	0.4427	0.0939
$\sqrt{20}$	0.1704	0.4003	0.1664	0.4592	0.0788
5	0.1579	0.4305	0.1337	0.4793	0.0637
6	0.1304	0.4671	0.0986	0.5133	0.0420
7	0.1064	0.4887	0.0769	0.5376	0.0288
9	0.0819	0.5078	0.0631	0.5616	0.0188
10	0.0865	0.5096	0.0695	0.5636	0.0204
12	0.1661	0.4760	0.1363	0.5311	0.0495
14	0.1867	0.4605	0.1533	0.5148	0.0578
15	0.1826	0.4620	0.1500	0.5150	0.0561
17	0.1699	0.4684	0.1440	0.5198	0.0513
20	0.1607	0.4747	0.1319	0.5258	0.0473
21	0.1615	0.4748	0.1324	0.5259	0.0475
21.5	0.1618	0.4747	0.1327	0.5259	0.0476

ния, в зависимости от  $\sqrt{R}$ , основных параметров течения, характеризующих давление  $E$  и составляющие трения на стенках ( $F''(0)$ ,  $F''(\sqrt{R})$ ,  $G'(0)$ ,  $G'(\sqrt{R})$ ). Лишь после  $\sqrt{R} = 20$  наступает стабилизация этих величин, так же как и распределений составляющих скорости (фиг. 2, 3). Можно полагать, что с увеличением безразмерного рас-



Фиг. 5

стояния  $s\sqrt{\omega/\nu} = \sqrt{R}$  между стенками течение вблизи вращающейся стенки должно приближаться к случаю, рассмотренному Рожерсом и Лансом [1], когда вдали от плоскости, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , поток вращается с некоторой угловой скоростью  $\omega' < \omega$ . В то же время вблизи неподвижной стенки имеем случай Бодевадта [4], когда поток вращается с угловой скоростью  $\omega''$  над неподвижным основанием. Используя оба указанных решения, получаем из условия  $\omega' = \omega'' = \omega_0$ , что  $\omega_0 \approx 0.31$ , а  $E = \omega_0^2/2 \approx 0.048$ . Отсюда находим для вращающейся стенки  $F''(\sqrt{R}) \approx 0.474$ ,  $G'(\sqrt{R}) \approx 0.53$ . Именно к этим значениям стремятся при увеличении  $\sqrt{R}$  результаты расчетов, это же видно из распределения скоростей. Однако для неподвижной стенки получаем существенно различные результаты: вместо  $F''(0) \approx 0.291$ ,  $G'(0) \approx 0.24$ , по Бодевадту, здесь получаем  $F''(0) = 0.1618$ ,  $G'(0) = 0.1327$ . Это различие иллюстрируется распределением скоростей вблизи неподвижной стенки (фиг. 3) — кривые при увеличении  $\sqrt{R}$  не приближаются к кривым Бодевадта (проведены пунктиром).

Полученный результат объясняется тем, что для вращающейся плоскости пограничный слой начинает развиваться от оси вращения и распространяется до бесконечности, поэтому с удалением неподвижной стенки течение вблизи вращающейся стенки при-

ближается к случаю вращения диска во вращающемся потоке. Пограничный слой на неподвижной плоскости начинает формироваться в бесконечности, поэтому если в бесконечности находится вращающаяся стенка, а не вращающийся поток, как в случае Бодеадта, то результат должен получиться совершенно иной. Это проявляется еще в том, что если для окружной составляющей скорости при больших  $\sqrt{R}$  появляется уча-

Таблица 2

$k$	$\sqrt{R}=1$	3	5	10
$F''(0)$				
0	0.0665	0.1710	0.1579	0.0865
0.1	-0.5259	-0.0737	-0.0329	-0.0196
0.2	-1.0940	-0.2333	-0.1075	-0.0453
0.4	-2.1620	-0.4436	-0.2020	-0.0903
0.6	-3.1468	-0.6076	-0.3004	-0.1336
0.8	-4.0571	-0.7613	-0.3868	-0.1754
1.0	-4.9015	-0.9119	-0.4759	-0.2172
$F''(\sqrt{R})$				
0	0.1000	0.2932	0.4305	0.5096
0.1	0.7076	0.5052	0.5343	0.5503
0.2	1.3300	0.7560	0.7173	0.7081
0.4	2.6203	1.4029	1.2996	1.2561
0.6	3.9720	2.2303	2.0886	2.0183
0.8	5.3865	3.2101	3.0352	2.9405
1.0	6.8644	4.3202	4.1136	3.9958
$G'(0)$				
0	0.9987	0.3051	0.1337	0.0695
0.1	0.8948	0.1153	0.0091	0
0.2	0.8018	0.0431	0.0005	0
0.4	0.6439	0.0056	0	0
0.6	0.5171	0.0007	0	0
0.8	0.4152	0.0001	0	0
1.0	0.3332	0	0	0
$G'(\sqrt{R})$				
0	1.0043	0.4343	0.4793	0.5636
0.1	1.0921	0.6286	0.6435	0.6683
0.2	1.1762	0.7807	0.7772	0.7833
0.4	1.3344	1.0248	1.0134	1.0101
0.6	1.4813	1.2255	1.2134	1.2081
0.8	1.6184	1.3998	1.3879	1.3820
1.0	1.7472	1.5556	1.5441	1.5378
$E$				
0	0.1496	0.1250	0.0637	0.0204
0.1	-0.4769	-0.0107	-0.0147	-0.0196
0.2	-1.1338	-0.1544	-0.1076	-0.0906
0.4	-2.5428	-0.5412	-0.4123	-0.3613
0.6	-4.0839	-1.0959	-0.9010	-0.7992
0.8	-5.7633	-1.8275	-1.5551	-1.4030
1.0	-7.5869	-2.7357	-2.3795	-2.1720

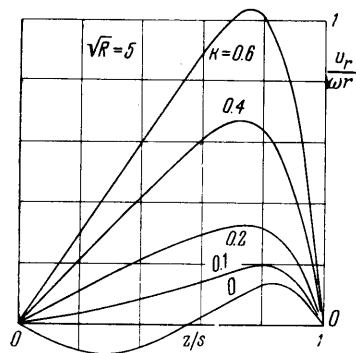
сток почти постоянной скорости, то для радиальной составляющей этого нет, и нельзя говорить о двух пограничных слоях на стенках, разделенных вращающимся как твердое тело ядром (фиг. 4).

Отметим, что характер распределения скоростей и его изменение с ростом  $R$  качественно согласуются с замерами Дэйли и Ниса [8]: их профили скоростей имеют характерные изгибы, соответствующие расчету (см. кривые для  $\sqrt{R} = 14$  и  $\sqrt{R} = 21.5$  на фиг. 4), с ростом  $R$  появляется участок постоянства окружной скорости. Однако нельзя было ожидать количественного соответствия ввиду того, что опыты проводились с дисками, ограниченными цилиндрическим кожухом, и притом при турбулентном режиме течения.

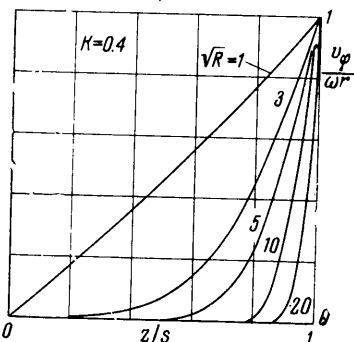
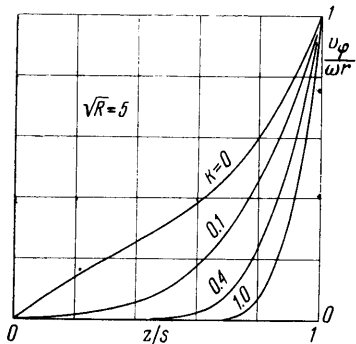
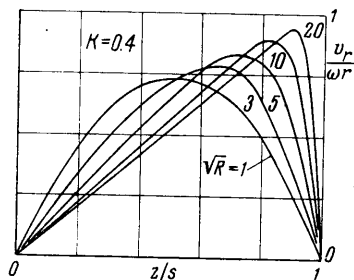
Интересен характер изменения поверхностей тока с ростом  $R$ . Взяв безразмерную функцию тока в виде

$$\psi^{\circ} = \frac{\psi}{\omega s^3} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 \frac{F}{\sqrt{R}}$$

можем характеризовать поверхности тока для данного  $R$  построением графика  $\psi^{\circ}=1$ , т.е.



$$\frac{r}{s} = \left(\frac{\sqrt{R}}{F}\right)^{1/2}$$



Фиг. 6

Фиг. 7

С ростом  $R$  линии тока все более прижимаются к стенкам (фиг. 5), происходит характерный изгиб поверхностей тока.

Заметим, что уже незначительный вдув ( $k \leq 0.1$  при  $\sqrt{R} < 20$ ) пресекает подсаживание по направлению к оси вращения среды вдоль неподвижной стенки (фиг. 5 и 6), развивается выпуклый профиль радиальных скоростей и гасится закрутка потока вблизи неподвижной стенки. При заданном вдуве ( $k = \text{const}$ ) с увеличением числа  $R$  также гасится закрутка вблизи неподвижной стенки, увеличивается подсаживание потока вращающейся стенкой, максимум профиля радиальных скоростей приближается к вращающейся стенке (фиг. 7). Соответственно, при фиксированном расстоянии между стенками растут составляющие напряжения трения на вращающейся стенке, и сжимаются — на неподвижной. Влияние интенсивности вдува  $k$  и числа Рейнольдса  $R$  на составляющие напряжения трения на стенках и на давление видно из табл. 2. В частности, видно, что с ростом  $R$  необходимо увеличивать интенсивность вдува  $k$  для пресечения подсаживания среды вдоль неподвижной стенки (т. е. чтобы  $F''(0) = 0$ ).

Поступило 12 IX 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rogers M. H., Lance G. N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, № 4.
2. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Изд. иностр. лит., 1962.
3. G r o h n e D. Über die laminare strömung in einer Kreisylindrischen Dose mit Rotierendem Deckel. Nachrichten Acad. Wiss. Göttingen. Math—Phys. Kl., 1956, № 1.
4. B ö d e w a d t U. T. Die Drehströmung über festem Grunde. Z. angew. Math. und Mech., 1940, B. 20, № 5, p. 241—253.
5. D a i l y J. W., N e s e r R. E. Chamber Dimension Effects of Enclosed Rotating Disks, J. Basic Engng., Trans. ASME, Ser. D, 1960, vol. 82, № 1, 217—232.