ГИДРОСТАТИКА В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

А. Д. ТЮПЦОВ

(*Харьков*)

В статье [1] рассматривались равновесные формы поверхности жидкости в слабых гравитационных полях. Как отмечалось в [1], не все равновесные формы могут быть реализованы в действительности, так как они не всегда устойчивы.

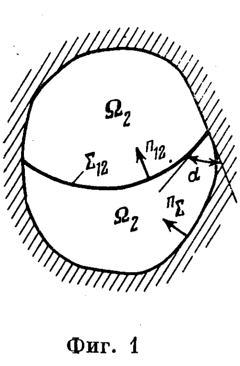
Ниже рассматривается задача об устойчивости равновесного состояния идеальной, несжимаемой жидкости, находящейся под действием сил поверхностного натяжения и потенциального поля массовых сил. При решении этой задачи используется принцип минимума потенциальной энергии системы. Условие устойчивости сформулировано в терминах собственных значений линейной краевой задачи, возникающей при рассмотрении вопроса о минимуме потенциальной энергии. Это общее условие применяется к осесимметричной задаче и, в частности,— к задаче об устойчивости жидкости, подвешенной в цилиндрическом сосуде.

1. Пусть некоторый сосуд (фиг. 1) заполнен двумя несмешивающимися жидкостями с плотностью ρ_1 — в области Ω_1 и ρ_2 — в области Ω_2; пусть $\Pi_1(\mathbf{x})$ и $\Pi_2(\mathbf{x})$ — плотности потенциальной энергии массовых сил в Ω_1 и Ω_2 соответственно, x — радиус-вектор точки.

Потенциальная энергия рассматриваемой системы с учетом сил поверхностного натяжения выражается функционалом

$$U = \sigma_{12}\int\limits_{\Sigma_{12}} d\Sigma + (\sigma_{23} - \sigma_{31})\int\limits_{\Sigma_{23}} d\Sigma + \int\limits_{\Omega_1} \Pi_1(\mathbf{x})\, d\Omega + \int\limits_{\Omega_2} \Pi_2(\mathbf{x})\, d\Omega + \text{const} \qquad (1.1)$$

Здесь σ_{ij} — коэффициент поверхностного натяжения на границе Σ_{ij} i-й и j-й сред ($i, j = 1, 2, 3$; индекс 3 относится к значениям величин на стенке сосуда; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — постоянные величины). Известно, что для устойчивости равновесного состояния консервативной системы необходимо и достаточно, чтобы в этом состоянии потенциальная энергия системы имела изолированный минимум. При этом, за исключением некоторых особых случаев, первая вариация потенциальной энергии должна быть равна нулю, а о наличии изолированного минимума можно судить по знаку второй вариации потенциальной энергии.



Фиг. 1

Пусть $\delta\mathbf{x}(\mathbf{x})$ — вектор смещения частицы жидкости. Будем считать, что $\delta\mathbf{x}(\mathbf{x})$ есть непрерывно дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая условиям

$$\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma, \qquad \operatorname{div}\delta\mathbf{x} = 0 \text{ в } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \qquad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{n}_\Sigma$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности Σ сосуда. Тогда

$$\delta U = -\sigma_{12}\int\limits_{\Sigma_{12}} 2H\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{12}\, d\Sigma + \sigma_{12}\int\limits_{L} \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2\, dl + \sigma\int\limits_{L} \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3\, dl +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Pi_1\cdot\delta\mathbf{x}\, d\Omega + \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Pi_2\cdot\delta\mathbf{x}\, d\Omega \qquad (1.3)$$

$$\sigma = \sigma_{23} - \sigma_{31}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}_{12}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times n_\Sigma$$

Здесь u, v — криволинейные координаты на поверхности Σ_{12}; H (u, v) — средняя кривизна поверхности Σ_{12}; $\mathbf{n}_{12}$ — единичный вектор нормали к Σ_{12}, направленный от Ω_2 к Ω_1; $\mathbf{e}_1$ — единичный вектор, касательный к линии L пересечения поверхностей Σ_{12} и Σ и направленный так, что при обходе контура L рассматриваемая часть поверхности Σ_{12} остается слева, если смотреть с конца вектора $\mathbf{n}_{12}$.

При варьировании первых двух слагаемых в (1.1) использовалась формула Гаусса для вариации площади поверхности ([2], стр. 262).

В силу первого из условий (1.2), вектор $\delta\mathbf{x}$ на контуре L можно представить в виде $\delta\mathbf{x} = (\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$; поэтому

$$\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2 = (\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3)\,(\mathbf{e}_3\cdot e_2) \tag{1.4}$$

Переходя к определению второй вариации потенциальной энергии, преобразуем выражение (1.3) к более удобной форме. Для этого воспользуемся равенством (1.4) и произведем подстановку

$$\nabla\Pi_1 = -\nabla p_1, \qquad \nabla\Pi_2 = -\nabla p_2$$

Здесь p_1 (x), p_2 (x)— давление в жидкости в равновесном состоянии в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

После интегрирования по частям получим

$$\delta U = \int\limits_{\Sigma_{12}} [p_1 - p_2 - 2\sigma_{12}H]\, N d\Sigma + \int\limits_{L} (\sigma_{12}\cos\alpha + \sigma)\, f\, dl$$

$$(N(u, v) = \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{12},\ f = \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3) \tag{1.5}$$

Здесь α — угол смачивания, $\cos\alpha = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_{12}\cdot\mathbf{n}_\Sigma$. Варьируя равенство (1.5) и обозначая $p_1 - p_2 - 2\sigma_{12}H = \varphi$, $\sigma_{12}\cos\alpha + \sigma = \psi$, получим

$$\delta^2 U = \int\limits_{\Sigma_{12}} (\delta\varphi)\, N d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_{12}} \varphi\delta\,(N d\Sigma) + \int\limits_{L} (\delta\psi)\, f dl + \int\limits_{L} \psi\delta\,(f dl) \tag{1.6}$$

Если система находится в равновесном состоянии, то выполняются условия [3]

$$p_1 - p_2 = 2\sigma_{12}H \ \text{ на } \Sigma_{12}, \qquad \sigma_{12}\cos\alpha + \sigma = 0 \ \text{ на } L \tag{1.7}$$

В этом случае равенство (1.6) принимает вид

$$\delta^2 U = \int\limits_{\Sigma_{12}} (\delta\varphi)\, N d\Sigma + \int\limits_{L} (\delta\psi)\, f dl \tag{1.8}$$

Для дальнейшего удобно представить вектор $\delta\mathbf{x}$ на Σ_{12} в виде суммы $\delta\mathbf{x} = \delta_1\mathbf{x} + \delta_2\mathbf{x}$, $\delta_1\mathbf{x} = N\mathbf{n}_{12}$. В соответствии с этим вариации рассматриваемых величин также будем представлять в виде суммы $\delta A = \delta_1 A + \delta_2 A$.

Используя формулу для вариации средней кривизны поверхности [2], получим

$$\delta_1\varphi = N\frac{\partial}{\partial n}\,[p_1(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x})] - \sigma_{12}\,[(4H^2 - 2K)\,N + \Delta_\Sigma N]\ \left(\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n}_{12}\cdot\nabla\right)$$

Здесь K (u, v) — гауссова кривизна поверхности Σ_{12}; Δ_Σ — оператор Лапласа—Бельтрами. Так как вектор $\delta_2\mathbf{x}$ лежит в плоскости, касательной к Σ_{12}, то

$$\delta\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial s_u}\mathbf{e}_u + \frac{\partial\varphi}{\partial s_v}\mathbf{e}_v\right)\cdot\delta_2\mathbf{x}$$

Здесь ds_u, ds_v — дифференциалы длины дуги вдоль координатных линий u и v соответственно; $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ — единичные векторы, направленные вдоль тех же координатных линий. Так как $\varphi = 0$ на Σ_{12}, то $\delta_2\varphi = 0$ и

$$\delta\varphi = N\frac{\partial}{\partial n}(p_1 - p_2) - \sigma_{12}\left[(4H^2 - 2K)N + \Delta_\Sigma N\right] \tag{1.9}$$

Проварьируем выражение $\psi = \sigma_{12}\cos\alpha + \sigma$

$$\delta\psi = \sigma_{12}\delta\,(\mathbf{n}_{12}\cdot\mathbf{n}_\Sigma) = \sigma_{12}\,(\delta\mathbf{n}_{12}\cdot\mathbf{n}_\Sigma + \mathbf{n}_{12}\cdot\delta\mathbf{n}_\Sigma) \tag{1.10}$$

$$\delta\mathbf{n}_{12} = \delta_1\mathbf{n}_{12} + \frac{\partial\mathbf{n}_{12}}{\partial s_1}\mathbf{e}_1\cdot\delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{n}_{12}}{\partial s_2}\mathbf{e}_2\cdot\delta\mathbf{x}, \qquad \delta\mathbf{n}_\Sigma = \frac{\partial\mathbf{n}_\Sigma}{\partial s_1}\mathbf{e}_1\cdot\delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{n}_\Sigma}{\partial s_3}\mathbf{e}_3\cdot\delta\mathbf{x} \tag{1.11}$$

Для единичного вектора нормали $\mathbf{n}_{12}$ имеем [4]

$$\mathbf{n}_{12} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{w} \qquad \left(\mathbf{x}_u = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u},\ \mathbf{x}_v = \frac{\delta\mathbf{x}}{\partial v};\ w = \sqrt{EG - F^2}\right)$$

где E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы. Поэтому, учитывая, что $\delta_1\mathbf{x} = N\mathbf{n}_{12}$, для вариации $\delta_1\mathbf{n}_{12}$ получим

$$\delta_1\mathbf{n}_{12} = \frac{1}{w}\,(N_u\mathbf{n}_{12}\times\mathbf{x}_v + N_v\mathbf{x}_u\times\mathbf{n}_{12}) + {}$$
$$+ \frac{N}{w}\,(\mathbf{n}_{12_u}\times\mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u\times\mathbf{n}_{12_v}) - \mathbf{n}_{12}\frac{\delta w}{w} \tag{1.12}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (1.12), не зависит от выбора системы координат u, v. Поэтому без ограничения общности можно считать, что координатные линии u, v на контуре L направлены вдоль векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно, а численно координаты равны длине соответствующих дуг. Тогда

$$\frac{1}{w}\,(\mathbf{n}_{12}\times\mathbf{x}_v N_u + N_v\mathbf{x}_u\times\mathbf{n}_{12}) = -\frac{\partial N}{\partial s_1}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial N}{\partial s_2}\mathbf{e}_2 \tag{1.13}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (1.12) есть вектор, ортогональный к n_{12}, а сумма двух остальных слагаемых — вектор, параллельный $\mathbf{n}_{12}$. Так как вариация единичного вектора ортогональна к этому вектору, то

$$\frac{N}{w}\,(\mathbf{n}_{12_u}\times\mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u\times\mathbf{n}_{12_v}) - \mathbf{n}_{12}\frac{\delta w}{w} = 0$$

Поэтому

$$\delta_1\mathbf{n}_{12} = -\frac{\partial N}{\partial s_1}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial N}{\partial s_2}\mathbf{e}_2$$

Для определения производных от $\mathbf{n}_{12}$ и $\mathbf{n}_\Sigma$ воспользуемся формулой для производной от нормали к поверхности по произвольному направлению $\mathbf{t}$ на этой поверхности [4]

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s} = -k_1\cos\vartheta\mathbf{t}_1 - k_2\sin\vartheta\mathbf{t}_2 = -\varkappa\mathbf{t} + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\frac{\sin 2\vartheta}{2}\mathbf{n}\times t$$
$$(\varkappa = k_2\cos^2\vartheta + k_2\sin^2\vartheta)\,] \tag{1.14}$$

Здесь k_1, k_2 — главные кривизны поверхности; $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ — единичные векторы, соответствующие главным направлениям на поверхности; v — угол между векторами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_1$. Используя (1.10) — (1.12), получим

$$\delta\psi = \sigma_{12}\left[(\varkappa_1\cos\alpha - \varkappa_2)f + \frac{\partial N}{\partial s_2}\right]\sin\alpha \tag{1.15}$$

Здесь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — кривизны нормальных сечений поверхностей Σ_{12} и Σ вдоль направлений $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ соответственно.

Теперь можно записать в явной форме выражение для второй вариации потенциальной энергии

$$\frac{1}{\sigma_{12}}\delta^2 U = \left\{\int\limits_{\Sigma_{12}} (aN - \Delta_\Sigma N)\, N d\Sigma + \int\limits_{L}\left[(\varkappa_1 \cos\alpha - \varkappa_2) f + \frac{\partial N}{\partial s_2}\right] f \sin\alpha\, dl\right\} \tag{1.16}$$

$$a = \frac{1}{\sigma_{12}}\frac{\partial}{\partial n}(p_1 - p_2) - 4H^2 + 2K$$

Если учесть, что $N = \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{12}$ и $f = \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3$, то легко видеть, что $\delta^2 U$ есть однородный квадратичный функционал относительно $\delta\mathbf{x}$. Вектор $\delta\mathbf{x}$ должен удовлетворять условию

$$\int\limits_{\Sigma_{12}} \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{12}\, d\Sigma \equiv \int\limits_{\Sigma_{12}} N d\Sigma = 0 \tag{1.17}$$

которое следует из (1.2).

Для устойчивости равновесного состояния системы необходимо, чтобы $\delta^2 U \geqslant 0$ на всех допустимых $\delta\mathbf{x}$. Так как $\delta^2 U$ есть однородный функционал относительно $\delta\mathbf{x}$, то можно ввести условие нормировки

$$\int\limits_{\Sigma_{12}} (\delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}_{12})^2\, d\Sigma \equiv \int\limits_{\Sigma_{12}} N^2 d\Sigma = 1 \tag{1.18}$$

Если контур L является кусочно-гладким, а функции $a\ (u,\ v)$ на поверхности Σ_{12} и $\varkappa_1 \cos\alpha - \varkappa_2$ на L ограничены снизу, то функционал (1.16) на множестве вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1.17) и (1.18), также ограничен снизу, а его минимум равен наименьшему собственному значению ν^* следующей краевой задачи [5]:

$$aN - \Delta_\Sigma N - \nu N = \mu \quad \text{на } \Sigma_{12} \tag{1.19}$$

$$\left.\begin{aligned}(\varkappa_1\cos\alpha - \varkappa_2) N + \frac{\partial N}{\partial s_2}\sin\alpha = 0 \quad & (\sin\alpha \neq 0)\\ N = 0 \quad & (\sin\alpha = 0)\end{aligned}\right\} \text{ на } L \tag{1.20}$$

В (1.19) величина $\mu = \mathrm{const}$ определяется условием (1.17).

Так как $\sigma_{12}\nu^*$ есть наименьшее значение второй вариации потенциальной энергии U, то условие устойчивости рассматриваемой системы можно сформулировать следующим образом.

Для устойчивости равновесного состояния жидкости, находящейся под действием сил поверхностного натяжения и потенциального поля массовых сил, необходимо, чтобы наименьшее собственное значение ν^* задачи (1.19), (1.20), (1.17) было неотрицательным, и достаточно, чтобы оно было положительным.

2. Рассмотрим более подробно вопрос об устойчивости для осесимметричной поверхности раздела жидкостей.

Пусть r, θ и z — цилиндрические координаты, ось z совпадает с осью симметрии поверхности Σ_{12}. В качестве криволинейных координат на Σ_{12} примем θ и длину дуги s, отсчитываемую от некоторой начальной точки вдоль сечения поверхности полуплоскостью $\theta = \mathrm{const}$.

В равновесном состоянии $p_1(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \mathrm{const}$ (где $F(\mathbf{x})$ — известная функция), поэтому первое равенство (1.7) можно рассматривать как уравнение поверхности Σ_{12}, а второе — как граничное условие. Произвольную постоянную, входящую в разность $p_1 - p_2$, можно определить, задавая объем одной из жидкостей

$$\int\limits_{\Omega_2} d\Omega = V_2 \tag{2.1}$$

Для осесимметричной поверхности в системе координат s, θ уравнение эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$r'' = -z'\left(h + c - \frac{z'}{r}\right), \qquad z'' = r'\left(h + c - \frac{z'}{r}\right)$$

$$\left({}' = \frac{d}{ds};\ \ h = \frac{F}{\sigma_{12}},\ c = \mathrm{const}\right) \tag{2.2}$$

Уравнение (1.19) и граничное условие (1.20) принимают вид

$$aN - \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{r'}{r}\frac{\partial N}{\partial s} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} - \nu N = \mu \qquad \begin{pmatrix} s_1 < s < s_2 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} (\varkappa_1 \cos\alpha - \varkappa_2) N + \frac{\partial N}{\partial s}\sin\alpha = 0 \quad & (\sin\alpha \neq 0) \\ N = 0 \quad & (\sin\alpha = 0) \end{aligned}\right\} \quad (s = s_1,\ s = s_2) \tag{2.4}$$

Если один из концов кривой $r(s)$, $z(s)$ лежит на оси z, то условие (2.4) на этом конце нужно заменить требованием ограниченности решения уравнения (2.3). Периодические по θ решения уравнения (2.3) ищем в форме

$$N(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(s) \sin n\theta + \psi_n(s) \cos n\theta] \tag{2.5}$$

Подставляя это выражение для $N(s, \theta)$ в уравнение (2.3), граничные условия (2.4) и равенство (1.17), получим

$$\varphi_0'' + \frac{r'}{r}\varphi_0' - a\varphi_0 + \nu\varphi_0 + \mu = 0 \qquad (s_1 < s < s_2) \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} (\varkappa_1 \cos\alpha - \varkappa_2)\varphi_0 + \varphi_0' \sin\alpha = 0 \quad & (\sin\alpha \neq 0) \\ \varphi_0 = 0 \quad & (\sin\alpha = 0) \end{aligned}\right\} \quad (s = s_1,\ s = s_2) \tag{2.7}$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \varphi_0(s)\, r(s)\, ds = 0 \tag{2.8}$$

$$\varphi_n'' + \frac{r'}{r}\varphi_n' - a\varphi_n - \frac{n^2}{r^2}\varphi_n + \nu\varphi_n = 0 \qquad (s_1 < s < s_2;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} (\varkappa_1 \cos\alpha - \varkappa_2)\varphi_n + \varphi_n' \sin\alpha = 0 \quad & (\sin\alpha \neq 0) \\ \varphi_n = 0 \quad & (\sin\alpha = 0) \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} s = s_1,\ s = s_2 \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Систему уравнений для $\psi_n(s)$ не приводим, так как она идентична системе (2.6) — (2.10), т. е. $\psi_n(s) = \varphi_n(s)$, и поэтому в дальнейшем будем рассматривать только функции $\varphi_n(s)$. Пусть $\nu_{01}, \nu_{02}, \ldots, \nu_{n1}, \nu_{n2}, \ldots$ — собственные значения задач (2.6), (2.7), (2.8) и (2.9), (2.10) соответственно расположенные в порядке возрастания. Очевидно, что

$$\nu^* = \min\{\nu_{01}, \min_n \nu_{n1}\} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

Покажем, что

$$\min_n \nu_{n1} = \nu_{11} \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

и поэтому

$$\nu^* = \min(\nu_{01}, \nu_{11}) \tag{2.12}$$

Действительно, нетрудно убедиться, что при каждом фиксированном n величина ν_{n1} равна минимальному значению функционала

$$J(\varphi, n) = \int_{s_1}^{s_2} \left(\varphi'^2 + a\varphi^2 + \frac{n^2}{r^2}\varphi^2\right) r\, ds + \left[r(\varkappa_1 \cos\alpha - \varkappa_2)\frac{\varphi^2}{\sin\alpha}\right]_{s=s_1}^{s=s_2} \tag{2.13}$$

на множестве M функций $\gamma(s)$, непрерывных вместе со своими производными и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{s_1}^{s_2} r\varphi^2 ds = 1$$

т. е.

$$\nu_{n1} = \min_\varphi J(\varphi, n) \qquad (\varphi \in M) \tag{2.14}$$

Очевидно,

$$J(\varphi, n) - J(\varphi, m) = (n^2 - m^2)\int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\varphi^2}{r} dt < 0 \quad \text{при } n < m \tag{2.15}$$

Пусть

$$\min_\varphi J(\varphi, m) = J(\varphi^*, m) \qquad (\varphi \in M)$$

Тогда из равенства (2.14) и неравенства (2.15) следует

$$\nu_{n1} - \nu_{m1} = \min_{\varphi \in M}[J(\varphi, n) - J(\varphi^*, m)] \leqslant J(\varphi^*, n) - J(\varphi^*, m) < 0 \quad (n < m)$$

Отсюда и следует (2.11). Таким образом, в случае осесимметричной поверхности раздела задача об устойчивости равновесного состояния жидкости значительно упрощается и сводится к нахождению ν_{01} и ν_{11}.

3. С практической точки зрения, особый интерес представляет случай, когда поле массовых сил является однородным гравитационным с потенциалом $\Pi(x) = \rho g z + \text{const}$ ($g = 9.81$ *м/сек*^{2}; n — коэффициент перегрузки), а поверхность раздела жидкостей — односвязной поверхностью вращения. В этом случае в каждом конкретном сосуде поверхность раздела определяется тремя параметрами: числом Бонда

$$B = \frac{(\rho_2 - \rho_1) n g L^2}{\sigma_{12}}$$

(L — характерный размер), углом смачивания и коэффициентом заполнения [1]. Из физических соображений ясно, что при достаточно больших отрицательных числах Бонда (по отношению к направлению сил тяжести более плотная жидкость находится над менее плотной) равновесное состояние жидкости, если оно существует, будет неустойчивым. Значение числа Бонда, при котором равновесное состояние превращается из устойчивого в неустойчивое, назовем критическим и обозначим B_*. Величина B_* является функцией угла смачивания α и коэффициента заполнения k; вид функции $B_*(\alpha, k)$ зависит от геометрии сосуда.

Ниже будет предложен метод построения функции $B_*(\alpha, k)$ для цилиндрического сосуда в предположении, что поверхность раздела жидкостей не имеет общих точек с днищами сосуда и является односвязной. При таком предположении форма поверхности раздела и B^* не будут зависеть от коэффициента заполнения.

Пусть $r(s)$, $z(s)$ — сечение поверхности раздела полуплоскостью $\theta = \text{const}$. В точке пересечения поверхности с осью z будем считать $s = 0$.

В случае однородного гравитационного поля в (2.2) имеем $h = bz$ ($b = (\rho_2 - \rho_1) ng\, \sigma_{12}^{-1}$). После перехода к безразмерным переменным

$$S = \sqrt{|b|}\, s, \quad R = \sqrt{|b|}\, r, \quad W = \sqrt{|b|}\,(z + c/b)$$

система при $b < 0$ приобретает вид

$$R'' = W'\left(W + \frac{W'}{R}\right), \quad W'' = -R'\left(W + \frac{W'}{R}\right) \quad \left({}' = \frac{d}{dS}\right) \tag{3.1}$$

Начальные условия для системы (3.1) имеют вид [1]

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 1, \quad W(0) = W_0, \quad W'(0) = 0 \tag{3.2}$$

Здесь W_0 — параметр, определяющий решение.

Если $R'(W_0, S) \geqslant 0$ $(0 \leqslant S \leqslant S_1)$, то

$$r = \frac{R(W_0, S)}{\sqrt{|b|}}, \quad z = \frac{W(W_0, S)}{\sqrt{|b|}} - \frac{c}{b}$$

есть уравнение образующей поверхности раздела в цилиндре с радиусом $R_0 = R(S_1) / \sqrt{|b|}$ при угле смачивания $\alpha = \arcsin R'(S_1)$ и $B = bR_0^2$.

Система (2.6) — (2.10) (при $n = 1$) принимает следующий вид:

$$\varphi_0'' + \frac{R'}{R}\varphi_0' - a\varphi_0 + \nu\varphi_0 + \mu = 0 \quad (0 < S < S_1) \tag{3.3}$$

$$a = -R' - (W + W' / R)^2 - (W' / R)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 W'\varphi_0 + \varphi_0' R' &= 0 \quad (R'(S_1) \neq 0) \\ \varphi_0 &= 0 \quad (R'(S_1) = 0) \end{aligned}\right\} \quad (S = S_1) \tag{3.4}$$

$$\int_0^{S_1} R(S)\varphi_0(S)\,dS = 0 \tag{3.5}$$

$$\varphi_1'' + \frac{R'}{R}\varphi_1' - a\varphi_1 - \frac{1}{R^2}\varphi_1 + \nu\varphi_1 = 0 \quad (0 < S < S_1) \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 W'\varphi_1 + \varphi_1' R' &= 0 \quad (R'(S_1) \neq 0) \\ \varphi_1 &= 0 \quad (R'(S_1) = 0) \end{aligned}\right\} \quad (S = S_1) \tag{3.7}$$

Используя свойства кривых $R(W_0, S)$, $W(W_0, S)$ (см. [1]) и обычные оценки для собственных чисел, можно показать, что при любом $|W_0| < \infty$ и при $S_1 \to 0$ наименьшие собственные числа задач (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6), (3.7) стремятся к $+\infty$, т. е. в цилиндре поверхность раздела

$$r = \frac{R(W_0, S)}{\sqrt{|b|}}, \quad z = \frac{W(W_0, S)}{\sqrt{|b|}} - \frac{c}{b} \quad (0 \leqslant S \leqslant S_1)$$

является устойчивой при достаточно малых S_1. Точку $S_1 = S^\circ$ будем называть критической, если $\nu^*(S^\circ) = 0$ и $\nu^*(S_1) > 0$ $(0 < S_1 < S^\circ)$. Можно показать, что на каждой кривой $R(W_0, S)$, $W(W_0, S)$ имеется критическая точка $S^\circ(W_0) < \infty$. Из вышесказанного следует, что

$$|B_*|^2 = R^2(W_0, S^\circ(W_0)), \quad \alpha = \arcsin R'(W_0, S^\circ(W_0)) \tag{3.8}$$

Таким образом, задача о построении функции $B_*(\alpha)$ сводится к отысканию критических точек.

Так как $S_1 = S^\circ$ является первым нулем функции $\nu^*(S_1)$, то для нахождения критических точек можно предложить следующий метод. Положим, в уравнениях (3.3) и (3.6) $\nu = 0$. Ограниченное в точке $S = 0$ решение задачи (3.3), (3.4), (3.5) будем искать в виде

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + d\varphi_{02} \quad (d = \mathrm{const}) \tag{3.9}$$

где φ_{01} — частное решение неоднородной задачи, φ_{02} — решение задачи

$$\varphi_{02}'' + \frac{R'}{R}\varphi_{02}' - a\varphi_{02} = 0, \quad \varphi_{02}(0) = 1, \quad \varphi_{02}'(0) = 0 \tag{3.10}$$

При $\nu = 0$ задача (1.9), (1.20), (1.17) есть задача «в вариациях» по отношению к задаче (1.7) и условию (2.1).

При $p_1 - p_2 = (\rho_2 - \rho_1)ngz + \mathrm{const}$ первое из равенств (1.8) допускает сдвиг по произвольному направлению, а это означает, что можно принять $N = AR' + BW' \sin\theta$ $(A, B = \mathrm{const})$, т. е.

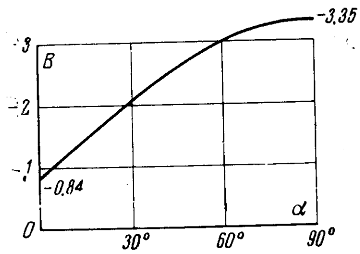
$$\varphi_{01}(S) = AR'(W_0, S), \qquad \varphi_1(S) = BW'(W_0, S) \tag{3.11}$$

Подстановка первого выражения (3.11) в уравнение (3.3) дает $A = \mu$. Уравнение (3.6) имеет особенность в точке $S = 0$, поэтому при $\nu = 0$ оно имеет единственное ограниченное решение (если не учитывать произвольный постоянный множитель), и это решение выражается вторым равенством (3.11). Подставляя (3.9) и первое равенство (3.11) в условие (3.5), легко видеть, что при любом $d \neq 0$ всегда можно подобрать A так, чтобы условие (3.5) выполнялось. Условие (3.4) принимает вид

$$\left.\begin{array}{ll} \varkappa_1 W'\varphi_{02} + \varphi_{02}'R' = 0 & (R'(S_1) \neq 0) \\ \varphi_{02} = 0 & (R'(S_1) = 0) \end{array}\right\} \quad (S = S_1) \tag{3.12}$$

Условие (3.7) при подстановке значения $\varphi_1 = BW'$ принимает вид (3.13)

$$\varkappa_1(S_1) \equiv -\left(W + \frac{W'}{R}\right)\Bigg|_{S=S_1} = 0 \quad (R'(S_1) \neq 0)$$



Фиг. 2

Будем численно интегрировать уравнения (3.10) и (3.6) с соответствующими начальными условиями и систему (3.1), (3.2) при некотором W_0, вычисляя на каждом шаге левые части равенств (3.12) и (3.13). Первая точка, в которой изменит знак левая часть равенства (3.12) или (3.13), и будет критической на данной кривой. Таким образом, при каждом W_0 можно найти $S^\circ(W_0)$, а по формулам (3.8) — определить $B^*(W_0)$ и $\alpha(W_0)$ и построить график $B_*(\alpha)$.

Задача об отыскании критических точек была запрограммирована и просчитана М. А. Беляевой на ЭЦВМ М-20.

При этом рассматривались только такие W_0, при которых $W(R)$ есть однозначная функция. По результатам этих вычислений (фиг. 2) построен график зависимости $B = B_*(\alpha 3)$; причем $B_*(\alpha) = B_*(180^\circ - \alpha)$. Для всех точек (B, α), лежащих ниже кривой $B_*(\alpha)$, соответствующее равновесное состояние жидкости является устойчивым, а для точек, лежащих выше кривой,— неустойчивым.

В заключение автор благодарит М. А. Беляеву за проведение вычисления, Н. Д. Копачевского и А. Д. Мышкиса — за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Поступило 20 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях, I. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Бляшке В. Дифференциальная геометрии. ОНТИ, 1935.
3. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, 1956.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы метематической физики, т. II. Гостехиздат, 1951, стр. 487, 491.