

О ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ ЗА ПОДВОДНЫМ КРЫЛОМ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

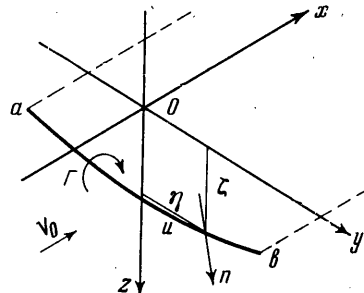
Г. А. ГОШЕВ

(Ленинград)

На основе результатов работы [1] исследуется изменение уровня воды за горизонтальным подводным крылом и предлагается приближенный расчет понижения (или повышения) уровня воды при больших скоростях движения.

1. Исходные данные. Для определения формы поверхности воды за крылом используем решение задачи о подводном крыле конечного размаха в работе [1]. Напомним основные допущения: жидкость считается идеальной и бесконечно глубокой, движение крыла равномерным, крыло заменяется вихревой системой по Прандтлю, состоящей из одного присоединенного вихря; граничные условия на поверхности воды принимаются в соответствии с линейной теорией волн.

Пусть Γ — циркуляция крыла; V_0 — скорость движения; x, y, z — координаты подвижной системы; η, ζ — координаты точки на несущей линии, т. е. на присоединенном вихре (фиг. 1).



Фиг. 1

Для потенциала Φ вихревой системы, имитирующей крыло, получено выражение [1]

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_a^b \Gamma(u) \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{R(\zeta)} + \frac{1}{R(-\zeta)} \right] d\xi du - \frac{1}{2\pi} \int_a^b \Gamma(u) \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial n} e^{-k(z+\zeta)} \times \\ \times \left\{ \cos xm \int_{-\infty}^x J_0 \cos \xi m d\xi + \sin xm \int_{-\infty}^x J_0 \sin \xi m d\xi \right\} dk du \quad (1.1)$$

$$R(\zeta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad v = \frac{g}{V_0^2}, \quad m = \sqrt{vk}$$

$$J_0 = J_0(k \sqrt{\xi^2 + (y-\eta)^2}) \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \cos(n\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \cos(n\eta)$$

Здесь u — криволинейная координата точки (η, ζ) на несущей линии; a, b — пределы интегрирования по параметру u ; оператор d/dn — производная по нормали к крылу в плоскости yOz .

Изменение уровня воды δ в линейной теории волн

$$\delta = \frac{V_0}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{при } z=0 \quad (1.2)$$

В принятой системе координат $+\delta$ соответствует понижению уровня. Подставив (1.1) в (1.2), получим общее выражение для поверхности воды

при движении крыла любой формы.

$$\delta = -\frac{V_0}{2\pi g} \int_a^b \Gamma(u) \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\infty e^{-kz} m \left\{ \cos xm \int_{-\infty}^x J_0 \sin \xi m d\xi - \right. \\ \left. - \sin xm \int_{-\infty}^x J_0 \cos \xi m d\xi \right\} dk du \quad (1.3)$$

Для горизонтального крыла введем обозначения: h — погружение несущей линии; l — длина крыла; b_0 — ширина хорды по середине крыла. Тогда

$$\zeta = h, \quad u = \eta, \quad a = -\frac{l}{2}, \quad b = \frac{l}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (1.4)$$

Для простоты будем считать циркуляцию Γ постоянной по размаху и выразим ее через коэффициент подъемной силы C_y

$$\Gamma = 1/2 C_y V_0 b_0 \quad (1.5)$$

Учитывая (1.4) и (1.5), запишем (1.3) в виде

$$\frac{\delta}{b_0} = \frac{C_y}{2\pi} U_x \quad (1.6)$$

$$U_x = \frac{-1}{2v} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^\infty e^{-kh} km \left\{ \cos xm \int_{-\infty}^x J_0 \sin \xi m d\xi - \sin xm \int_{-\infty}^x J_0 \cos \xi m d\xi \right\} dk d\eta \quad (1.7)$$

Интегралы в (1.7) не выражаются через какие-либо известные функции, и вычисление представляет немалые трудности даже при использовании быстродействующих машин. Поэтому предпочтительнее произвести приближенное вычисление U_x для практически интересного диапазона изменения характерных параметров. Одним из таких параметров является скорость движения, которая у судов на подводных крыльях настолько велика, что v составляет $1/30 - 1/40$.

Будем считать v малым и вычислим U_x в двух случаях: 1) вблизи крыла, при малых x , и 2) на больших расстояниях за крылом.

2. Случай малых x . При малых x функцию U_x можно приближенно заменить ее пределом при $v \rightarrow 0$

$$U_x \approx U_{x0} = \lim_{v \rightarrow 0} U_x = -\frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^\infty e^{-kh} k^2 \left\{ \int_{-\infty}^x J_0 \xi d\xi - x \int_{-\infty}^x J_0 d\xi \right\} dk d\eta = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{y-l/2+R(y-l/2)}{y+l/2+R(y+l/2)} - \frac{y-l/2}{R(y-l/2)} + \frac{y+l/2}{R(y+l/2)} - \right. \\ \left. - x \frac{y-l/2}{h^2+(y-l/2)^2} \left[1 + \frac{x}{R(y-l/2)} \right] + x \frac{y+l/2}{h^2+(y+l/2)^2} \left[1 + \frac{x}{R(y+l/2)} \right] \right\} \\ R(y \pm l/2) = \sqrt{x^2 + h^2 + (y \pm l/2)^2} \quad (2.1)$$

Полагая в (2.1) $y = 0$ и переходя одновременно к безразмерным величинам $h^\circ = 2h/l$, $x^\circ = 2x/l$, получим формулу для расчета U_{x0} в наиболее характерной, диаметральной плоскости крыла

$$U_{x0} = 1/2 \ln \frac{R-1}{R+1} + \frac{x^\circ}{1+h^{\circ 2}} \left(1 + \frac{x^\circ}{R} \right) \quad (R = \sqrt{1+h^{\circ 2}+x^{\circ 2}}) \quad (2.2)$$

Представление о форме свободной поверхности над крылом дает график функции U_{x_0} (фиг. 2), рассчитанный по (2.2).

Полученную картину, конечно, нельзя считать точным аналогом действительности. Источником ожидаемых расхождений будут являться допущения, принятые при решении задачи о крыле и, главным образом, — допущение о замене крыла несущей линией. Попытка уточнить полученные результаты путем перехода к несущей поверхности настолько усложняет задачу, что она теряет все преимущества математических методов исследования. Поэтому полученные результаты, несмотря на их «приближенность», можно использовать не только как материал для оценки величины δ , но и как основу для обобщений при экспериментальных исследованиях.

3. Случай больших положительных x . Положим вначале скорость движения равной $V_0 = \infty$. Тогда из (2.1) следует

$$U_x \rightarrow x \left[\frac{y + l/2}{h^2 + (y + l/2)^2} - \frac{y - l/2}{h^2 + (y - l/2)^2} \right] \quad (3.1)$$

Этот же результат можно получить и другим путем. При больших x верхние пределы интегрирования в (1.7) положим равными $x \approx \infty$.

Тогда

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(k \sqrt{\xi^2 + (y - \eta)^2}) \sin \xi m d\xi = 0$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(k \sqrt{\xi^2 + (y - \eta)^2}) \cos \xi m d\xi = \frac{2 \cos(y - \eta) \sqrt{k^2 - m^2}}{\sqrt{k^2 - m^2}} \quad (k > m)$$

$$I_2 = 0 \quad (k < m)$$

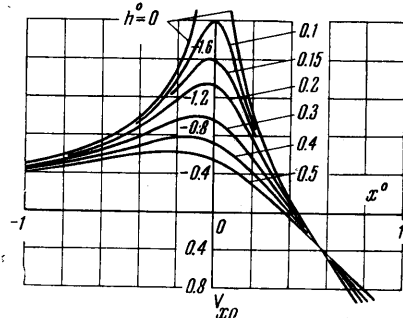
Следовательно,

$$U_x \approx \frac{1}{v} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{\infty} e^{-kh} \sqrt{vk} \sin x \sqrt{vk} \frac{\cos(y - \eta) \sqrt{k^2 - vk}}{\sqrt{k^2 - vk}} dk d\eta \quad (3.2)$$

Нетрудно видеть, что предел выражения (3.2) при $v \rightarrow 0$ будет даваться формулой (3.1). Из (3.1) следует, что в предельном случае $V_0 = \infty$ далеко за крылом образуется впадина постоянной ширины, глубина которой возрастает пропорционально удалению от крыла. В случае, когда скорость движения конечна, хотя и велика, векомость жидкости проявится в том, что глубина впадины не будет возрастать бесконечно, а с некоторого значения x начнет уменьшаться, образуя далее гребень. Очевидно, это произойдет тем дальше от крыла, чем больше скорость движения. Последнее наводит на мысль о следующем приближенном вычислении U_x . В формуле (3.2) всюду, за исключением случая, когда малая величина v входит в произведение с большой величиной x можно положить $v \approx 0$.

Имеем

$$U_x \approx \frac{1}{Vv} \int_0^{\infty} e^{-kh} \sin x \sqrt{vk} \frac{\sin(l/2 + y)k + \sin(l/2 - y)k}{\sqrt{k}} dk \quad (3.3)$$



Фиг. 2

Покажем, что U_x^{-1} в форме (3.3) можно выразить через табулированную [2] функцию

$$w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} j(l/2 \pm y) &= \int_0^\infty e^{-kh} \sin x \sqrt{vk} \sin(l/2 \pm y) k \frac{dk}{\sqrt{k}} = \\ &= i \int_0^\infty \exp\left\{-\left[h + i\left(\frac{l}{2} \pm y\right)\right] k\right\} \sin x \sqrt{vk} \frac{dk}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Постановкой $k = t^2 [h + i(l/2 \pm y)]^{-1}$ приведем его к виду

$$j\left(\frac{l}{2} \pm y\right) = \frac{2i}{\sqrt{h + i(l/2 \pm y)}} \int_0^\infty e^{-t^2} \sin tx \left(\frac{v}{h + i(l/2 \pm y)}\right)^{1/2} dt \quad (3.4)$$

Докажем тождество

$$j = \int_0^\infty e^{-t^2} \sin 2tz dt = w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx \quad (3.5)$$

Здесь $w(z)$ функция табулирована в работе [2].

Разлагая $\sin 2tz$ в ряд и интегрируя почленно, получим

$$j = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1} n!}{2(2n+1)!}$$

Правую часть (3.5) подстановкой $k = z \sin \varphi$ приведем к виду

$$w(z) = z \int_0^{1/2\pi} \exp(-z^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!} \int_0^{1/2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi$$

В силу

$$\int_0^{1/2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}, \quad w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1} n!}{2(2n+1)!}$$

и тождество (3.5) доказано. Учитывая (3.4), (3.5), запишем (3.3) в виде

$$U_x \approx \frac{w[1/2 xg(+y)]}{\sqrt{h + i(1/2 l + y)}} + \frac{w[1/2 xg(-y)]}{\sqrt{h + i(1/2 l - y)}} \quad \left(r(\pm y) = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h + i(1/2 l \pm y)}}\right) \quad (3.6)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w(z) &= u + iv, \quad a = \frac{vl}{2}, \quad h^\circ = \frac{2h}{l}, \quad x^\circ = \frac{2x}{l}, \quad y^\circ = \frac{2y}{l} \\ \rho(\pm y) &= \frac{x^\circ}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{h^{\circ 2} + (1 \pm y^\circ)^2}}\right)^{1/2}, \quad \theta(\pm y) = \frac{1}{2} \arctg \frac{1 \pm y^\circ}{h^\circ} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выделим в (3.6) вещественную часть и, учитывая обозначения (3.7), придем к окончательным результатам

$$U_x \approx \frac{2}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\psi[\rho(+y), \theta(+y)]}{[h^{\circ 2} + (1 + y^\circ)^2]^{1/4}} + \frac{\psi[\rho(-y), \theta(-y)]}{[h^{\circ 2} + (1 - y^\circ)^2]^{1/4}} \right\} \quad (3.8)$$

$$\psi = u(\rho, \theta) \sin \theta - v(\rho, \theta) \cos \theta \quad (3.9)$$

Вещественная и мнимая части $w(z)$ обладают свойствами

$$u(\rho, -\theta) = u(\rho, \theta), \quad v(\rho, -\theta) = -v(\rho, \theta)$$

Отсюда следует

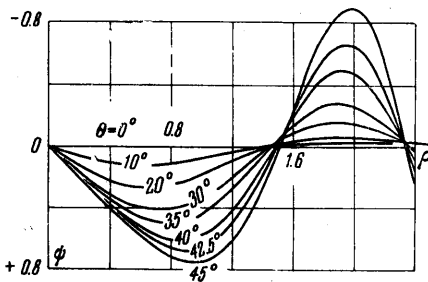
$$\psi(\rho, -\theta) = -\psi(\rho, \theta) \quad (3.10)$$

Таким образом, при вычислении ψ можно ограничиться положительными значениями аргумента θ , а при $1 \pm y^0 < 0$ и $\theta < 0$ — использовать тождество (3.10). График функции ψ , рассчитанной по (3.9) с использованием таблиц К. А. Карпова, приведен на фиг. 3.

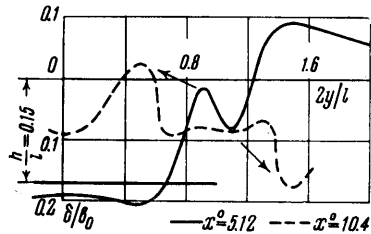
Кривые ψ при $\theta = \text{const}$ дают представление о форме поверхности воды за крылом. При больших скоростях движения в основном образуются расходящиеся волны, которые возникают на линиях $y = \pm l/2$ за концами крыла. Высота расходящихся волн быстро уменьшается по мере удаления от крыла.

Основную роль играют первые (правая и левая) волны, образующие за подводным крылом треугольную в плане впадину. Поперечные сечения впадины и смещение гребней первых волн для крыла ($c_y = 0.130$, $a = 0.068$, $h/b = 0.089$) указаны на фиг. 4.

где сплошные кривые соответствуют $x^0 = 5.12$, а штриховые $x^0 = 10.4$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для определения длины L впадины снимем с фиг. 3 значение ρ , соответствующее $\psi = 0$. Имеем

$$\rho_{\psi=0} \approx 1.5 = \frac{x^0}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{1+h^2}} \right)^{1/2}, \quad \frac{L}{l} \approx 1.5 \left(\frac{2V_0^2}{gl} \sqrt{1+h^2} \right)^{1/2}$$

Так как $h^2 \ll 1$, то

$$\frac{L}{l} \approx 2.12 \frac{V_0}{\sqrt{gl}}$$

Таким образом, длина впадины прямо пропорциональна скорости движения и практически не зависит от погружения крыла.

Поступило 12 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гошев Г. А. Теория подводного крыла конечного размаха произвольной формы. Тр. ЛИИТ, 1962, вып. 33.
2. Карпов К. А. Таблицы функций $w(z)$ в комплексной области. Изд-во АН СССР, 1954.