

ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗВУКОВОЙ СВОБОДНОЙ СТРУЕЙ ГАЗА

Г. Д. СЕВОСТЬЯНОВ

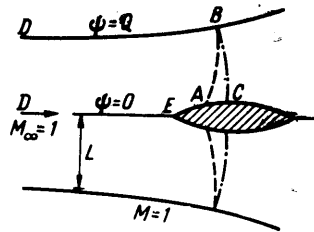
(Саратов)

В работе построена функция тока вдали от профиля, обтекаемого плоской звуковой свободной струей газа. Функция тока удовлетворяет уравнению Трикоми и строится на плоскости θ, η методом сингулярных интегральных уравнений. При неограниченном увеличении ширины струи и выполнении некоторого условия построенная функция тока переходит в автомодельное решение Ф. И. Франкля [1, 2] и К. Г. Гудерлея, описывающее безграничный звуковой поток вдали от профиля. В конце статьи рассмотрено обтекание профиля звуковой струей, вытекающей из канала.

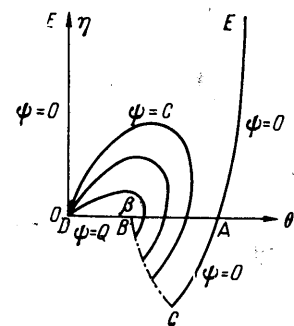
1. Пусть тонкий симметричный профиль помещен вдоль оси симметрии плоской свободной звуковой струи (фиг. 1), имеющей далеко перед профилем ширину $2L$. Так как скорости в струе вдали от профиля мало отличаются от скорости звука, то функция тока $\psi(\theta, \eta)$ приближенно удовлетворяет уравнению Трикоми

$$\eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси симметрии DE , η — известная функция модуля скорости. Пусть функция тока принимает значения: $\psi = 0$ — вдоль оси DE и границы профиля EAC , $\psi = Q$ — вдоль свободной звуковой границы DB , где $2Q$ — расход газа в струе. Между профилем и свободной границей струи появляется звуковая линия AB , за которой поток становится сверхзвуковым. В силу симметрии течения рассмотрим область потока выше оси DE (до предельной характеристики



Фиг. 1



Фиг. 2

BC). Если угол передней кромки E профиля не равен нулю, то область течения отобразится в область $BDEACB$ на плоскости $\theta\eta$ (фиг. 2), где $\theta_B = \beta$, при этом граница EAC на фиг. 2, соответствующая поверхности профиля, обычно заранее неизвестна.

В достаточно широкой струе ($L \gg l$, где l — характерный линейный размер профиля) поток вдали от профиля и форма его границы будут слабо зависеть от формы EAC профиля.

Исследуем поведение $\psi(\theta, \eta)$ вдали от профиля, пренебрегая условием $\psi = 0$ вдоль CAE , но требуя, чтобы все линии тока пересекали звуковую линию AB и предельную характеристику BC в окрестности точки B . Это будет выполняться, если оставить значения $\psi(\theta, \eta)$ на границе EDB без изменения и потребовать, чтобы $\psi = 0$ на бесконечности плоскости $\theta\eta$ ($\theta \geq 0, \eta \geq 0$) и на бесконечно удаленной характеристике $A'C'$ уравнения (1.1) (фиг. 3), так как поведение линий уровня $\psi = \text{const}$ на фиг. 2 и качественно похоже вблизи границы EDB . Тогда получим краевую задачу Трикоми: в области $EDBC'A'E$ на фиг. 3 найти

регулярное решение $\psi(\theta, \eta)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$\psi(0, \eta) = 0 \quad (0 < \eta < \infty) \quad (1.2)$$

$$\psi = 0 \quad \text{на бесконечности} \quad (\theta \geq 0, \eta \geq 0) \quad (1.3)$$

$$\psi = 0 \quad \text{на характеристике } A'C' \quad (1.4)$$

$$\psi(\theta, 0) = Q \quad (0 < \theta \leq \beta) \quad (1.5)$$

Построив единственное решение задачи, покажем, что $\psi(\theta, \eta)$ в окрестности B — точки пересечения звуковых линий AB и DB — будет иметь следующее поведение ([3], гл. IV):

$$\begin{aligned} \psi(\theta, 0) &\approx Q - (12)^{2/3} h(\theta - \beta)^{1/6}, & \psi_\eta(\theta, 0) &\approx h(\theta - \beta)^{-1/2} \\ \psi_\theta(\theta, 0) &\approx - (2/3)^{1/3} h(\theta - \beta)^{-5/6}, & \theta \rightarrow \beta + 0 \quad (h = \text{const} > 0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

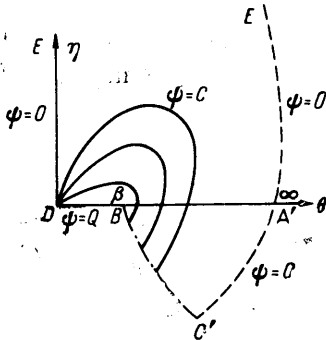
Обозначив

$$\psi(\theta, 0) = \tau(\theta), \quad \psi_\eta(\theta, 0) = \nu(\theta) \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (1.7)$$

заменяем условие (1.4) эквивалентным ему интегральным соотношением ([4], § 5.5)

$$\tau(\theta) = \gamma \int_0^\infty (t - \theta)^{-1/3} \nu(t) dt \quad (\beta < \theta < \infty),$$

$$\gamma = \frac{(3)^{2/3} \Gamma^3(1/3)}{4\pi^2} \quad (1.8)$$



Фиг. 3

и приходим к краевой задаче в эллиптической области (при $\eta \geq 0$). Решив эту задачу и продолжив решение аналитически в область $\eta \leq 0$ ([4], § 5.5), получим искомую функцию тока $\psi(\theta, \eta)$ вдали от профиля, взяв значения θ, η , достаточно близкие к границе EDB на фиг. 3. Переход на физическую плоскость совершается при помощи известных формул.

2. Построим функцию $\psi(\theta, \eta)$ в области $\eta \geq 0$. Так как функция

$$\frac{\eta}{\pi \sqrt{3}\gamma} [(\theta - a)^2 + \frac{4}{9}\eta^3]^{-3/4}$$

удовлетворяет уравнению (1.1) (a — произвольная действительная постоянная, γ определена в (1.8)), а предел ее при $\eta \rightarrow 0$ есть дельта-функция $\delta(\theta - a)$, решение задачи (1.2) — (1.6) ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi(\theta, \eta) &= \frac{\eta Q}{\pi \sqrt{3}\gamma} \int_0^\beta \{[(\theta - t)^2 + s^2]^{-3/4} - [(\theta + t)^2 + s^2]^{-3/4}\} dt + \\ &+ \frac{\eta}{\pi \sqrt{3}\gamma} \int_\beta^\infty \tau(t) \{[(\theta - t)^2 + s^2]^{-3/4} - [(\theta + t)^2 + s^2]^{-3/4}\} dt \quad \left(s = \frac{2}{3} \eta^{3/2}\right) \quad (2.1) \end{aligned}$$

Эта функция удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) и первому соотношению из (1.7). Неизвестную функцию $\tau(\theta)$ найдем, удовлетворив условию (1.4) или (1.8). Для этого из (2.1) имеем, кроме (1.8), еще одно соотношение между $\tau(\theta)$ и $\nu(\theta)$

$$\begin{aligned} \nu(\theta) &= \frac{Q}{\pi \sqrt{3}\gamma} \int_0^\beta [(\theta - t)^{-3/2} - (\theta + t)^{-3/2}] dt - \frac{1}{\pi \sqrt{3}\gamma} \int_\beta^\infty \tau(t) (\theta + t)^{-3/2} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi \sqrt{3}\gamma} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \int_\beta^\infty \tau(t) [(\theta - t)^2 + \frac{4}{9}\eta^3]^{-3/4} dt \right\} \quad \beta < \theta < \infty \quad (2.2) \end{aligned}$$

Из (1.8) и (2.2) получим сингулярное интегральное уравнение для производной $\tau'(\theta)$. Для этого, дифференцируя в (1.8) по θ , запишем

$$\tau'(\theta) = \gamma \int_{\beta}^{\infty} (t - \theta)^{-1/2} v'(t) dt \quad (\beta < \theta < \infty)$$

Подставив сюда производную $v'(\theta)$ из (2.2), преобразовав интегралы, чтобы они содержали $\tau'(\theta)$, и вычислив элементарные интегралы, придем к уравнению для $\tau'(\theta)$, учитывая, что $\tau(\beta) = Q$

$$\begin{aligned} \tau'(\theta) = & -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{Q}{\theta - \beta} + \frac{Q}{\pi \sqrt{3}} \lim_{\eta \rightarrow 0} J(\beta, \theta; \eta) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\tau'(t)}{t + \theta} dt + \\ & + \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_{\beta}^{\infty} \lim_{\eta \rightarrow 0} \tau'(t) J(t, \theta; \eta) dt + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{Q}{\theta} \quad (\beta < \theta < \infty). \end{aligned}$$

Здесь

$$J(t, \theta; \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \int_{\theta}^{\infty} (\xi - \theta)^{-1/2} \left[(\xi - t)^2 + \frac{4}{9} \eta^3 \right]^{-3/2} d\xi \right\} \quad (2.3)$$

Выполнив в (2.3) дифференцирование и замену переменной интегрирования

$$\xi = \theta + x \sqrt{(\theta - t)^2 + \frac{4}{9} \eta^3} \quad (0 \leq x < \infty)$$

придем к интегралам, выражающимся через сферические функции ([5], формула 8.714.2). После преобразований имеем

$$\begin{aligned} J(t, \theta; \eta) = & (2)^{-2/3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \frac{\cos \varphi}{\theta - t} \left[\sin^{-1/3} \varphi \cdot P_{-2/3}^{-1/3}(\cos \varphi) - 3 \sin^{2/3} \varphi P_{-2/3}^{-1/3}(\cos \varphi) \right] \\ \cos \varphi = & \frac{\theta - t}{\sqrt{(\theta - t)^2 + s^2}}, \quad s = \frac{2}{3} \eta^{3/2} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (2.4) \end{aligned}$$

Заменив в (2.4) сферические функции гипергеометрическими рядами и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J(t, \theta; \eta) = \frac{3}{2} \frac{1}{\theta - t}, \quad \theta \neq t$$

При $\theta = t$ функция $\lim J(t, \theta; \eta)$ ведет себя как дельта-функция $\delta(\theta - t)$. Чтобы выделить эту особенность, проинтегрируем $J(t, \theta; \eta)$ из (2.4) по t в интервале $(-\infty, +\infty)$ и сделаем замену переменной интегрирования

$$t = \theta - s \frac{1 - 2x}{2 \sqrt{x(1-x)}}, \quad s = \frac{2}{3} \eta^{3/2}, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J(t, \theta; \eta) dt = \int_0^1 L(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [L(x) + L(1-x)] dx$$

$$L(x) = {}_3F_4(1-x)^{-1/3} [x^{-1} F(2/3, 1/3; 4/3; x) - {}_2F_2(5/3, -2/3; 1/3; x)]$$

Используя формулы преобразования гипергеометрических функций ([5], 9.131), найдем, что

$$L(x) + L(1-x) = -\frac{3}{2} \frac{\Gamma(4/3) \Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} [x(1-x)]^{-1/3}$$

Учитывая, что главное значение интеграла Коши $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\theta - t} = 0$, имеем

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J(t, \theta; \eta) = \frac{3}{2} \frac{1}{\theta - t} - \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \delta(t - \theta) \quad (2.5)$$

Тогда в уравнении для $\tau'(\theta)$ взаимно уничтожатся два члена и после приведения подобных членов оно примет вид

$$\tau'(\theta) + \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{1}{t - \theta} - \frac{1}{t + \theta} \right) \tau'(t) dt = \frac{2Q}{\pi \sqrt{3}} \frac{1}{\theta} \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (2.6)$$

Здесь берется главное значение сингулярного интеграла. Введя замену

$$\theta^2 = x, \quad \frac{Q}{\pi} \theta^{-2} = f(x), \quad \frac{\tau'(\theta)}{\theta} = \mu(x), \quad \beta^2 = c$$

придем к характеристическому уравнению с разомкнутым контуром

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \mu(x) + \frac{1/2 i}{\pi i} \int_c^{\infty} \frac{\mu(y)}{y - x} dy = f(x) \quad (c < x < \infty) \quad (2.7)$$

Из (1.3) следует, что $\mu(\infty) = 0$. Чтобы уравнение (2.7) имело всегда единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(x)$ обращалось в бесконечность интегрируемого порядка при $x = c$ ([6], §§ 42, 47). В этом классе функций уравнение (2.7) имеет индекс $\kappa = 0$, каноническую функцию $Z(x) = (x - c)^{-5/6}$ и единственное решение

$$\mu(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} f(x) - \frac{1/2 i}{\pi i} \int_c^{\infty} \frac{Z(x) f(y)}{Z(y) y - x} dy \quad (c < y < \infty) \quad (2.8)$$

Тогда единственное решение уравнения (2.6), к которому сводится задача (1.2) — (1.5), равно

$$\begin{aligned} \tau'(\theta) &= \frac{\sqrt{3}Q}{2\pi} \left[\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{t^2 - \beta^2}{\theta^2 - \beta^2} \right)^{5/6} \left(\frac{1}{t - \theta} - \frac{1}{t + \theta} \right) \frac{dt}{t} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}Q}{2\pi} \left[\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\pi \sqrt{3}} (\theta^2 - \beta^2)^{-5/6} \int_0^{\infty} \frac{x^{5/6} dx}{(x + \beta^2)(x - \theta^2 + \beta^2)} \right] \quad (\beta < \theta < \infty) \end{aligned}$$

Вычислив сингулярный интеграл ([7], стр. 251, формула 34; в формуле 3.228.5 при $c > 0$ из [5], содержащей тот же интеграл, допущена ошибка: оба члена формулы необходимо умножить на π), после упрощений получим

$$\tau'(\theta) = -\frac{Q(\beta)^{5/6}}{\pi} \frac{1}{\theta(\theta^2 - \beta^2)^{5/6}}, \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (2.9)$$

Тогда найдем

$$\tau(\theta) = -\int_{\beta}^{\infty} \tau'(t) dt = \frac{3Q}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6} \quad \left(a = \left(\frac{\theta^2 - \beta^2}{\beta^2} \right)^{1/6} \right)$$

Вычислив интеграл, окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tau(\theta) &= \frac{3Q}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left(\frac{a^2 + a\sqrt{3} + 1}{a^2 - a\sqrt{3} + 1} \right) - \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (2a - \sqrt{3}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (2a + \sqrt{3}) - \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \right\}, \quad a = \left(\frac{\theta^2 - \beta^2}{\beta^2} \right)^{1/6} \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\tau(\theta) \approx Q - \frac{3Q}{\pi} \left(\frac{2}{\beta} \right)^{1/6} (\theta - \beta)^{1/6} \quad \text{при } \theta \approx \beta$$

Осталось проверить выполнение условия (1.6). Для этого необходимо исследовать поведение функции $v(\theta)$, определенной в (1.7), при $\theta \rightarrow \beta + 0$. Решив уравнение Абеля (1.8), имеем

$$v(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \int_{\theta}^{\infty} (t-\theta)^{-1/2} \tau'(t) dt, \quad (\beta < \theta < \infty)$$

Подставив сюда $\tau'(\theta)$ из (2.9) и интегрируя по частям, получим

$$v(\theta) = \frac{3\sqrt{3}Q\beta^{3/2}}{2\pi^2\gamma} \left[\int_{\theta}^{\infty} \frac{(t-\theta)^{1/2} dt}{t^2(t^2-\beta^2)^{3/2}} + \frac{5}{3} \int_{\theta}^{\infty} \frac{(t-\theta)^{1/2} dt}{(t^2-\beta^2)^{3/2}} \right] \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (2.11)$$

При $\theta \rightarrow \beta$ первый интеграл в (2.11) ограничен, второй интеграл легко вычисляется (используем формулы 3.197.1 и 9.132.3 из [5])

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\infty} (t-\theta)^{1/2} (t^2-\beta^2)^{-3/2} dt &= (\theta+\beta)^{-1/2} (2\beta)^{-3/2} B\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{2}\right) \times \\ &\times F\left(\frac{11}{6}, -\frac{5}{6}; \frac{3}{2}; -\frac{\theta-\beta}{2\beta}\right) + (\theta^2-\beta^2)^{-1/2} (2\beta)^{-3/2} B\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right) \times \\ &\times F\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}; \frac{1}{2}; -\frac{\theta-\beta}{2\beta}\right) \quad (\beta < \theta) \end{aligned}$$

Имеем

$$v(\theta) \approx \left(\frac{9}{2}\right)^{1/2} \frac{Q\beta^{-1/2}}{2\pi} (\theta-\beta)^{-1/2} \quad \text{при } \theta \rightarrow \beta + 0$$

Учитывая поведение $\tau(\theta)$ и $\tau'(\theta)$ при $\theta \rightarrow \beta + 0$, убеждаемся в выполнении условия (1.6). Таким образом, функция тока $\psi(\theta, \eta)$ вдали от симметричного профиля, помещенного вдоль оси симметрии свободной звуковой струи, построена. Она определяется формулами (2.1) и (2.10), где значения θ, η надо брать достаточно близко от границы *EDB* на фиг. 3.

Чтобы функция тока равнялась нулю вдоль границы *EAC* профиля, надо к построенной функции $\psi(\theta, \eta)$ прибавить $\psi_2(\theta, \eta)$ — ограниченное решение уравнения (1.1), обращающееся в нуль на границе *EDB* и такое, чтобы $\psi + \psi_2 = 0$ вдоль *EAC* на фиг. 2.

3. Покажем, что построенная функция $\psi(\theta, \eta)$ переходит в автомодельное решение $\psi_0(\theta, \eta)$ уравнения (1.1), описывающее безграничный звуковой поток вдали от профиля [1, 2]

$$\begin{aligned} \psi_0(\theta, \eta) &= C\rho^{-5/2} [(1-s)^{1/2}(1/3+s) - (1+s)^{1/2}(1/3-s)] \quad (3.1) \\ \rho &= \sqrt{\theta^2 + 4/9\eta^3}, \quad s = \theta/\rho \end{aligned}$$

Здесь C — постоянная, зависящая от характерного линейного размера профиля, если ширина звуковой струи неограниченно возрастает ($L \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty$) и выполняется условие

$$Q\beta^{3/2} = B > 0, \quad \beta \rightarrow 0 \quad (B = \text{const}) \quad (3.2)$$

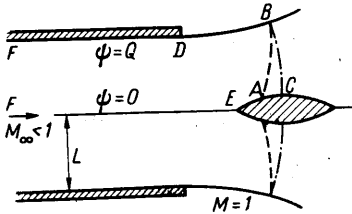
Из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \tau_0'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \psi_0(\theta, 0) &= -C \frac{10}{9} (2)^{1/2} \theta^{-3/2}, \quad v_0(\theta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_0(\theta, 0) = C \frac{2^{1/2}}{3^{3/2}} \theta^{-3/2} \\ &(0 < \theta < \infty) \quad (3.3) \end{aligned}$$

При этом функции $\tau_0(\theta), v_0(\theta)$ связаны соотношением

$$\tau_0(\theta) = \gamma \int_{\theta}^{\infty} (t-\theta)^{-1/2} v_0(t) dt \quad (0 < \theta < \infty) \quad (3.4)$$

Здесь γ определена в (1.8). Если обозначить предельные функции $\psi(\theta, \eta)$, $\tau(\theta)$, $v(\theta)$ при выполнении условия (3.2) через $\psi_*(\theta, \eta)$, $\tau_*(\theta)$, $v_*(\theta)$, то из (2.9) получим



Фиг. 4

$$\tau_*'(\theta) = -\frac{B}{\pi} \theta^{-3/2} \quad (0 < \theta < \infty)$$

Условие (1.8) заменится на (3.5)

$$\tau_*(\theta) = \gamma \int_0^\infty (t - \theta)^{-1/2} v_*(t) dt \quad (0 < \theta < \infty)$$

Приравняв $\tau_0'(\theta)$ и $\tau_*'(\theta)$, получим

$$C = \frac{9}{10\pi(2)^{1/2}} B \quad (3.6)$$

Тогда $\tau_0(\theta) \equiv \tau_*(\theta)$ при $0 < \theta < \infty$; поэтому из (3.4) и (3.6) имеем $v_0(\theta) \equiv v_*(\theta)$. Отсюда в силу условий

$$\psi_0(0, \eta) = \psi_*(0, \eta) = 0 \quad (0 < \eta < \infty)$$

из единственности задач Дирихле ($\eta \geq 0$) и Коши получим $\psi_0(\theta, \eta) \equiv \psi_*(\theta, \eta)$ в области на фиг. 3 при $\beta \rightarrow 0$.

Заметим, что недавно было экспериментально показано [8], что течение газа в звуковой струе вдали от тонкого профиля, помещенного в нее, мало отличается от течения, определенного функцией (3.1). Это будет в достаточно широкой струе ($\beta \approx 0$). Если l — характерный линейный размер профиля, то из анализа размерностей в (3.2) следует, что

$$l = AL(\beta)^{2/3} \quad (3.7)$$

Здесь A — безразмерная постоянная, зависящая от формы профиля, т. е. при выполнении условия (3.2) линейный размер профиля не меняется при расширении звуковой струи. Задачу обтекания симметричного клина свободной звуковой струей решил аналитически Маршнер [9] при условии $\beta \ll \theta_0$, где θ_0 — угол полураствора клина. Формула для длины клина получается из формул (9.3), (8.9а), (4.2) работы [6] и имеет вид (3.7).

4. Методом сингулярных интегральных уравнений можно аналогично построить функцию тока $\psi(\theta, \eta)$ вдали от симметричного профиля, помещенного вдоль оси симметрии звуковой струи, вытекающей из канала с параллельными стенками (фиг. 4).

Если функция $\psi(\theta, \eta)$ принимает прежние значения вдоль оси симметрии и границы струи, то указанным выше способом придем к краевой задаче в области на фиг. 3, при этом все краевые условия останутся без изменения, кроме (1.2), которое заменится на

$$\psi(0, \eta) = \begin{cases} Q & (0 < \eta < \eta_\infty) \\ 0 & (\eta_\infty < \eta < \infty) \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $\eta_\infty > 0$ — значение η , соответствующее дозвуковой скорости газа далеко внутри канала ($M_\infty < 1$). В этом случае решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi(\theta, \eta) = & \psi_1(\theta, \eta) + \frac{Q\eta}{\pi\sqrt{3}\gamma} \int_0^\beta \{[(\theta-t)^2 + s^2]^{-3/2} - [(\theta+t)^2 + s^2]^{-3/2}\} dt + \\ & + \frac{\eta}{\pi\sqrt{3}\gamma} \int_0^\infty \tau(t) \{[(\theta-t)^2 + s^2]^{-3/2} - [(\theta+t)^2 + s^2]^{-3/2}\} dt \quad \left(s = \frac{2}{3}(\eta)^{3/2}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\psi_1(\theta, \eta)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (4.1), (1.3) и $\psi_1(\theta, 0) = 0$, ($0 < \theta < \infty$):

$$\psi_1(\theta, \eta) = t^{1/2} \int_0^\infty \lambda a(\lambda) e^{-\lambda\theta} J_{1/2}(\lambda t) d\lambda, \quad t = \frac{2}{3}(\eta)^{3/2} \quad (0 < \theta < \infty) \quad (4.3)$$

$$a(\lambda) = Q(\lambda)^{-5/2} \left\{ \frac{2^{2/3}}{\Gamma(1/3)} - (\lambda t_\infty)^{2/3} J_{-2/3}(\lambda t_\infty) \right\}, \quad t_\infty = \frac{2}{3}(\eta_\infty)^{3/2} \quad (4.4)$$

Функция $\psi(\theta, \eta)$ из (4.2) удовлетворяет условиям (1.3), (1.5), (4.1) и первому соотношению из (1.7). Пропедев аналогичные преобразования (см. п. 2), приходим к сингулярному уравнению (2.6) для определения $\tau'(\theta)$, правая часть которого равна

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{3} \gamma \int_{\theta}^{\infty} (t - \theta)^{-1/2} v_1'(t) dt + \frac{2Q}{\pi \sqrt{3}} \frac{1}{\theta} \quad (\beta < \theta < \infty)$$

$$v_1(\theta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_1(\theta, 0) = \frac{6^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \int_0^{\infty} \lambda^{1/3} a(\lambda) e^{-\lambda \theta} d\lambda, \quad v_1'(\theta) = \frac{dv(\theta)}{d\theta}$$

После преобразований, используя (4.4), получим

$$\Phi(\theta) = \frac{2Q}{\pi \sqrt{3}} (\theta^2 + t_{\infty}^2)^{-1/2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{t_{\infty}^2}{\theta^2 + t_{\infty}^2}\right) \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (4.5)$$

Функция $\tau'(\theta)$ определяется единственным образом, если использовать условие (1.3) и формулы (2.7) и (2.8)

$$\tau'(\theta) = \frac{3}{4} \left[\Phi(\theta) - \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{t^2 - \beta^2}{\theta^2 - \beta^2} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{t - \theta} - \frac{1}{t + \theta} \right) \Phi(t) dt \right] \quad (\beta < \theta < \infty) \quad (4.6)$$

Отсюда определим $\tau(\theta)$, входящую в (4.2). Заметим, что формулу (4.2) можно преобразовать, сделав в последнем интеграле замену

$$(t \pm \theta)^2 + s^2 = x^{-3}s^2 \quad (0 < x < \infty)$$

и интегрируя по частям, при этом вместо $\tau(\theta)$ будет стоять $\tau'(\theta)$, определенная в (4.6), и появятся эллиптические интегралы. Функция $\psi(\theta, \eta)$, описывающая околосзвуковой поток газа вдали от профиля, помещенного в достаточно широкую звуковую струю, содержит параметры η_{∞} и β . При $\eta_{\infty} = 0$, $\beta > 0$ профиль находится в звуковой свободной струе (заметим, что решение Гудерля [11], стр. 301, описывает поток в звуковой струе вдали от профиля, но предел его при $\rho_0 \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ не исследован), при $\beta = 0$, $\eta_{\infty} > 0$ профиль помещен в канал с параллельными стенками [10].

В окрестности точки B функция $\psi(\theta, \eta)$ при $\eta_{\infty} = 0$ мало отличается от частного решения уравнения (1.1), описывающего поток газа вблизи точки пересечения звуковых линий ([3], гл. IV), так как для $\psi(\theta, \eta)$ выполняются соотношения (1.6); поэтому продолжение $\psi(\theta, \eta)$ через предельную характеристику BC и поведение решения в окрестности точки B на плоскости θ, η определяются этим частным решением. Неавтомодельное решение $\psi(\theta, \eta)$ из (4.2) описывает околосзвуковой поток газа в целом вдали от профиля (фиг. 4).

Автор благодарит С. В. Фальковича за ценные замечания при обсуждении статьи.

Поступило 23 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
2. Франкль Ф. И. Об одном классе решений газодинамических уравнений С. А. Чаплыгина. Уч. зап. МГУ, 1951, т. 154, № 4.
3. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Изд. ЛГУ, 1965.
4. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. Изд. иностр. лит., 1957.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 4-е изд. Физматгиз, 1962.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
7. Ватеман Н., Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Tables of integral transforms, vol. 2, New York Mc Graw-Hill Company, Inc., 1954.
8. Nguyen V. Q., Gontier G., Martinot-Lagarde A. Sur une vérification expérimentale d'une solution de l'équation d'Euler — Tricomi pour l'écoulement critique plan autour d'un profil d'aile. Compt. rend. Acad. sci., 1963, vol. 256, N 4.
9. Marschner B. W. The Flow Over a Body in a Choked Wind Tunnel and in a Sonic Free Jet. J. Aero. Sci., 1956, vol. 23, N 4.
10. Севостьянов Г. Д. Плоский околосзвуковой поток газа вдали от профиля, находящегося в канале. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
11. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1963.