

К РАСЧЕТУ СМЕШАННОГО ДО- И СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ПЛОСКОМ СОПЛЕ ДАВЛЕНИЯ

Н. А. ЛУКЬЯНОВ

(Москва)

Рассматривается плоское безвихревое до- и сверхзвуковое течение газа без учета вязкости и теплопроводности. Для системы уравнений движения смешанного эллиптико-гиперболического типа в плоскости потенциала найдено частное решение, соответствующее движению газа в сопле с криволинейной звуковой линией. Используемая для построения решения системы уравнений близка к однородной, что позволило в трансзвуковой области выделить главную часть решения.

Правильность выполненных упрощений хорошо подтверждается сравнением с расчетом, проведенным методом характеристик и экспериментом.

§ 1. Для описания движения газа в плоском сопле используется система уравнений движения в форме [1]

$$\eta b(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + b(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.1)$$

$$\eta = \left(\frac{3}{2} \int_{\lambda}^1 \left(\frac{h^2(1-\lambda^2)}{h^2-\lambda^2} \right)^{1/2} \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{2/3}, \quad b(\eta) = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{h^2(1-\lambda^2)}{\eta(h^2-\lambda^2)} \right)^{1/2}$$

$$\left(\lambda = \frac{W}{a_*}, \quad h^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

Здесь ψ — функции тока, φ — потенциал скорости, θ — угол наклона скорости, λ — безразмерная скорость, a_* — критическая скорость звука, W — скорость движения газа, c_p и c_v удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

Значение $\eta > 0$ соответствует дозвуковой скорости, $\eta < 0$ — сверхзвуковой скорости и $\eta = 0$ звуковой скорости.

Учитывая симметричность движения газа в сопле относительно оси $\psi = 0$, введем в рассмотрение новые функции при помощи соотношений

$$\theta_1 = \theta - \frac{1}{k} \left(\eta \psi + \frac{\psi^3}{3} \right), \quad \theta_2 = \eta - \frac{1}{k} \left[\frac{\varphi}{b(\eta)} - \frac{\psi^2}{2k} \right] \quad (1.2)$$

Здесь k — произвольная постоянная. Уравнения (1.1) примут вид

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} - \frac{k^3 \eta b(\eta)}{1 + \Phi b'(\eta)/k b^2(\eta)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} + \frac{\psi}{k [1 + \Phi b'(\eta)/k b^2(\eta)]} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} =$$

$$= \frac{\psi^2 [(1-k^2)/k^3] - (\eta + \psi^2) \Phi b'(\eta)/k^2 b^2(\eta)}{1 + \Phi b'(\eta)/k b^2(\eta)}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} + b(\eta) \left[1 + \frac{\Phi b'(\eta)}{k b^2(\eta)} \right] \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} + \frac{\psi b(\eta)}{k} \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.3)$$

Функции $\theta_1 = \theta_1(\varphi; \psi)$ и $\theta_2 = \theta_2(\varphi; \psi)$ ищем в виде степенных рядов, решая для уравнений (1.3) следующую задачу Коши:

$$\theta_1(\varphi, 0) = 0, \quad \theta_2(\varphi, 0) = f(\varphi) \quad \text{при } \varphi = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $f = f(\varphi)$ — произвольная аналитическая функция. Система (1.5) и начальные данные Коши (1.4) удовлетворяют условиям теоремы Коши-Ковалевской [2], поэтому задача Коши (1.4) будет иметь решение в виде степенного ряда, сходящегося в окрестности оси $\psi = 0$. Коэффициенты степенных рядов последовательно вычисляются при помощи уравнений (1.3) и начальных данных (1.4).

§ 2. Физическая плоскость (x, y) связана с плоскостью (φ, ψ) дифференциальными соотношениями

$$dx = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_2}{\rho} \frac{\sin \theta}{\lambda} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{\lambda} d\psi$$

При переходе от плоскости переменных (φ, ψ) к переменным физической плоскости (x, y) путь интегрирования выбирается в виде ломаной, состоящей из отрезка оси симметрии AB и отрезка линии равной скорости BD . Если координаты точек будут $A(\varphi, 0)$, $B(\varphi_2, 0)$ и $D(\varphi, \psi)$, то, учитывая, что ось сопла является линией тока $\psi = 0$ и на ней $\theta = 0$, из уравнений (2.1) получим

$$\begin{aligned} x &= \int_{\lambda_1}^{\lambda} F(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\lambda} \int_{\varphi_2}^{\varphi} \cos \theta d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho \lambda} \int_0^{\psi} \sin \theta d\psi + C \\ y &= \frac{1}{\lambda} \int_{\varphi_A}^{\varphi} \sin \theta d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho \lambda} \int_0^{\psi} \cos \theta d\psi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь интеграл по λ дает распределение скорости по оси сопла, λ_1 — значение безразмерной скорости в точке A . Для определения $F(\lambda)$ из (1.2) получим уравнение

$$\eta - \frac{1}{k} \frac{\varphi}{b(\eta)} - \theta_2(\varphi, 0) = 0 \quad (2.2)$$

Несущественная постоянная C при соответствующем выборе системы координат обращается в нуль. В дальнейшем положим $C = 0$. Интегралы по переменным φ и ψ вычисляются вдоль линий равной скорости.

В зависимости от рассматриваемых начальных данных Коши (1.4) решение (2.1) будет описывать различные смешанные до- и сверхзвуковые течения газа. На начальные данные Коши (1.4) наложены только условия теоремы Коши-Ковалевской [2], поэтому можно ожидать, что не все решения (2.1) будут соответствовать реальным течениям газа.

§ 3. Рассмотрим частное решение, соответствующее задаче Коши

$$\theta_1(\varphi; 0) = 0, \quad \theta_2(\varphi; 0) = a_1 \varphi \text{ при } \psi = 0 \quad (3.1)$$

Здесь a_1 — некоторая постоянная. Уравнение (2.2) для рассматриваемого случая примет вид

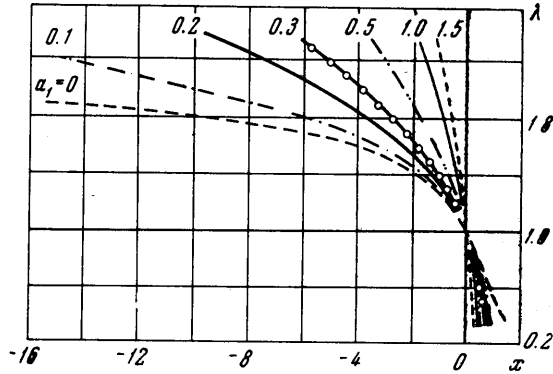
$$\frac{\varphi}{kb(\eta)} + a_1 \varphi - \eta = 0$$

из этого уравнения и уравнения (2.1) распределение скорости по оси сопла получим в виде

$$x = - \int_1^{\lambda} \left(\frac{h^2(1-\lambda^2)}{\eta(h^2-\lambda^2)} \right)^{1/2} \frac{[b(\eta) + \eta b'(\eta)] [k^{-1} + a_1 b(\eta)] - a_1 b(\eta) b'(\eta) \eta}{[k^{-1} + a_1 b(\eta)]^2} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad (3.2)$$

где штрихом обозначены производные.

Таким образом, частное семейство решений (2.1), соответствующее задаче Коши (3.1), будет характеризоваться двухпараметрическим семейством распределений скорости по оси сопла. Параметры k и a_1 можно выбирать, задаваясь первой и второй производной от λ по оси симметрии в одной из точек оси. На фиг. 1 и 2 приведено распределение скорости по оси сопла для различных значений a_1 и k . Из приведенных графиков следует, что решение (2.1) в рассматриваемом случае описывает непрерывное ускоряющееся течение газа.]



Фиг. 1

Если в начальных данных (3.1) положить $a_1 = 0$ и полагать $k = 1$, то решение (2.1), согласно (1.2) и (3.2), примет вид

$$x = - \int_1^\lambda \frac{\rho_0}{\rho} \frac{h^2 (1 - \lambda^2)}{\eta (h^2 - \lambda^2)} \left[1 + \eta \frac{b'(\eta)}{b^2(\eta)} \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \int_{\varphi_1}^\infty \cos \left[\psi \eta + \frac{\psi^3}{3} + \theta_1(\varphi, \psi) \right] d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho \lambda} \int_0^\psi \sin \left[\psi \eta + \frac{\psi^3}{3} + \theta_1(\varphi, \psi) \right] d\psi \quad (3.3)$$

$$y = \frac{1}{\lambda} \int_{\varphi_1}^\infty \sin \left[\psi \eta + \frac{\psi^3}{3} + \theta_1(\varphi, \psi) \right] d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho \lambda} \int_0^\psi \cos \left[\psi \eta + \frac{\psi^3}{3} + \theta_1(\varphi, \psi) \right] d\psi$$

Угол наклона скорости и безразмерная скорость вычисляются при помощи соотношений (1.2), которые записываются в виде

$$\theta = \psi \eta + \frac{\psi^3}{3} + \theta_1(\varphi, \psi), \quad \eta = \frac{\varphi}{b(\eta)} - \frac{\psi^2}{2} + \theta_2(\varphi, \psi) \quad (3.4)$$

$$\theta_1(\varphi, \psi) = \theta_{1\psi}(\varphi, 0) \psi + \theta_{1\psi\psi}(\varphi, 0) \frac{\psi^2}{2!} + \dots,$$

$$\theta_2(\varphi, \psi) = \theta_{2\psi}(\varphi, 0) \frac{\psi^2}{2!} + \theta_{2\psi\psi}(\varphi, 0) \frac{\psi^4}{4!} + \dots$$

Коэффициенты этих рядов последовательно вычисляются при помощи уравнений (1.3) и начальных данных.

§ 4. Сложность решения (3.3) в основном определяется функциями $\theta_1 = \theta_1(\varphi, \psi)$ и $\theta_2 = \theta_2(\varphi, \psi)$, которые можно рассматривать как решение задачи Коши $\theta_1(\varphi, 0) = 0$, $\theta_2(\varphi, 0) = 0$ при $\psi = 0$ для системы уравнений (1.3) при $k = 1$. Очевидно, что решение (3.3) имело бы простейший вид, если $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv 0$. Но система уравнений (1.3) неоднородна, а следовательно, не имеет этого тривиального решения.

Найдем область течения, в которой неоднородная система уравнений (1.3) может быть приближенно заменена однородной системой. Неоднородность системы уравнений (1.3) определяется правой частью первого уравнения, которая в рассматриваемом случае ($k = 1$) имеет вид

$$\frac{(\eta + \psi^2) \varphi b'(\eta) / b^2(\eta)}{1 + \varphi b'(\eta) / b^2(\eta)} = k_1$$

Отсюда следует, что в окрестности линий $\varphi = 0$, $\eta + \psi^2 = 0$, $\psi = 0$ при малых η и $\eta = 0$ при малых ψ можно выделить области в виде полос, содержащих указанные выше линии, в которых k_1 будет принимать столь малые значения, что правой частью первого из уравнений (1.3) можно пренебречь. В области G — области, в которой можно пренебрегать значением k_1 , неоднородную систему уравнений (1.3) можно приближенно заменить однородной системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} - \frac{\eta b(\eta)}{1 + \varphi b'(\eta) b^2(\eta)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} + \frac{\psi}{1 + \varphi b'(\eta) b^2(\eta)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} + b(\eta) \left[1 + \frac{\varphi b'(\eta)}{b^2(\eta)} \right] \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} - \psi b(\eta) \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Структура области G изображена на фиг. 3.

В § 5 будет показано, что линия $\eta + \psi^2 = 0$ в окрестности центра сопла совпадает с характеристикой, проходящей через центр сопла. Следовательно, в части трансзвуковой области можно существенно упростить решение (3.3), так как в этой области, согласно (4.1), приближенно можно положить $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

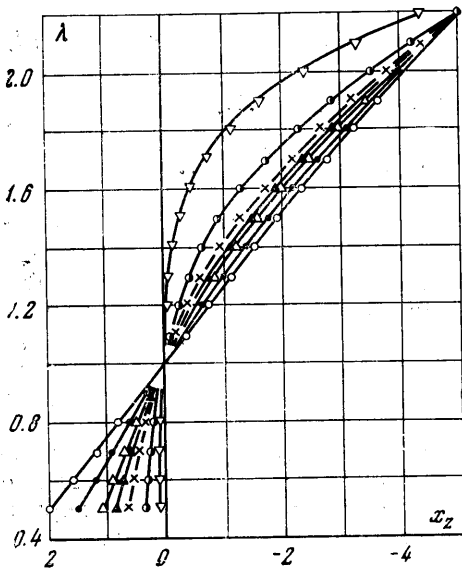
Тогда, если пренебречь малыми членами и перейти от φ к ψ , то главная часть решения (3.3) в области G запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= - \int_1^\lambda \frac{\rho_0}{\rho} \frac{h^2(1-\lambda^2)}{\eta(h^2-\lambda^2)} \frac{d\lambda}{\lambda^2} + \frac{b(\lambda)}{\lambda} \int_0^\psi \psi \cos\left(\psi\eta + \frac{\psi^3}{3}\right) d\psi - \frac{\rho_0}{\rho\lambda} \int_0^\psi \sin\left(\psi\eta + \frac{\psi^3}{3}\right) d\psi \\ y &= \frac{b(\lambda)}{\lambda} \int_0^\psi \psi \sin\left(\psi\eta + \frac{\psi^3}{3}\right) d\psi + \frac{\rho_0}{\rho\lambda} \int_0^\psi \cos\left(\psi\eta + \frac{\psi^3}{3}\right) d\psi \end{aligned} \tag{4.2}$$

Выражения для угла наклона скорости и безразмерной скорости, согласно (3.4), примут вид

$$\theta = \psi\eta + \frac{1}{3}\psi^3, \quad \eta = \varphi / b(\eta) - \frac{1}{2}\psi^2 \tag{4.3}$$

§ 5. Главная часть решения (4.2) дает возможность рассчитывать течение газа в сопле с криволинейной звуковой линией. Действительно, в уравнениях (4.2) положим $\psi = q - \text{const}$ или $\lambda = \lambda_i - \text{const}$; тогда получим соответственно уравнение линий тока или уравнение линий равных скоростей. На линии вершин $\theta = 0$, согласно уравнений (4.3) и (4.2), уравнение линии вершин будет иметь вид



Фиг. 2

$$\begin{aligned} x &= - \int_1^\lambda \frac{\rho_0}{\rho} \frac{h^2(1-\lambda^2)}{\eta(h^2-\lambda^2)} \frac{d\lambda}{\lambda^2} + \\ &+ \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{h^2(1-\lambda^2)}{\eta(h^2-\lambda^2)} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{2} y^2 \\ y &= \frac{\rho_0 \sqrt{-3\eta}}{\rho\lambda} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Уравнение совместности $\sigma(\lambda) \pm \pm \theta = 2\mu$ и первое из уравнений (4.3) дает связь между функцией тока и скоростью на характеристике $\psi = \psi(\lambda)$. Имея эту связь, при помощи (4.2) рассчитывают характеристику.

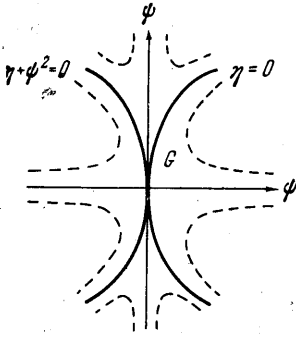
На характеристике, проходящей через центр сопла, выполняется соотношение

$$\sigma(\lambda) \pm \theta = 0 \tag{5.2}$$

Согласно [1], для сверхзвуковой области функция η представляется в виде

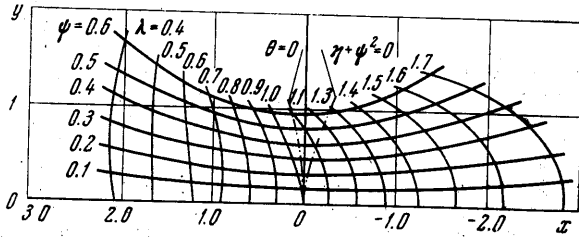
$$\eta = - (\frac{3}{2})^{1/2} \sigma(\lambda)^{3/2} \tag{5.3}$$

Тогда на основании (5.2), (5.3), (4.2) для характеристики первого семейства, проходящей через центр сопла, получим $\eta + \psi^2 = 0$.



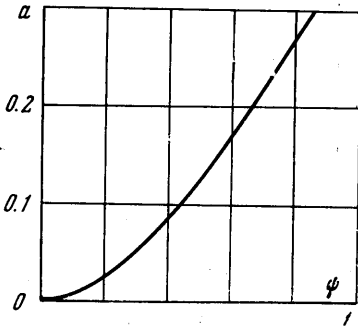
Фиг. 3

Результаты расчета течения в сопле: линии тока, линии равных скоростей, линия вершин и характеристика, проходящая через центр сопла, представлены на фиг. 4.

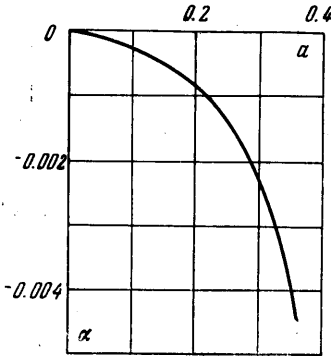


Фиг. 4

На фиг. 5 представлен график зависимости относительной кривизны линий тока a в критическом сечении от функции тока ψ ; при этом $a = y_* / R_*$, где y_* — полуширина сопла в критическом сечении и R_* — радиус кривизны линий тока в том же сечении. График поправки для секундного массового расхода $\alpha = (Q - Q^0) / Q^0$, где Q^0 — приближенное значение расхода через сопло по гидравлической теории и Q — значение расхода, соответствующее решению (4.2), представлен на фиг. 6.



Фиг. 5

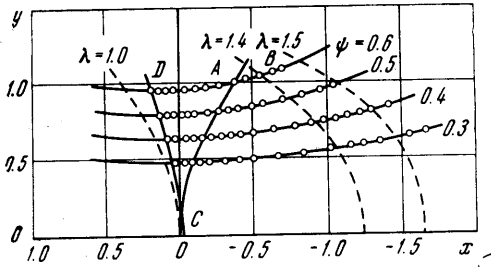


Фиг. 6

Выполненные в § 4 упрощения требуют проверки, так как не всегда пренебрежение малыми членами в нелинейных дифференциальных уравнениях мало влияет на их решения. Поэтому был проведен расчет линий тока в сверхзвуковой и частично в трансзвуковой областях сопла методом характеристик [4] на электронной счетной машине с большой точностью (начальные данные на оси сопла были заданы на отрезке $1.00 < \lambda \leq 1.77$ — всего 211 точек).

Результаты расчета методом характеристик и их сравнение с результатами аналитического расчета, выполненного при помощи главной части решения (4.2), приведены на фиг. 7. Линии тока, рассчитанные по (4.2), изображены сплошными линиями, круглые точки соответствуют расчету методом характеристик. Течение в сверхзвуковой области OAB рассчитывалось по заданному распределению скорости (4.2) вдоль оси сопла

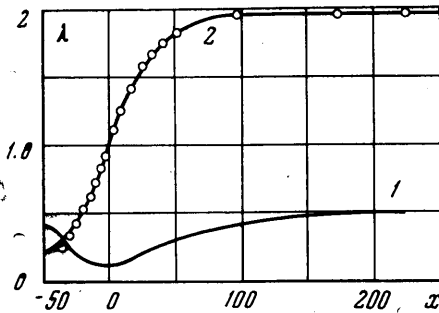
$\psi = 0$. Линии тока в части трансзвуковой области рассчитывались путем решения задачи Гурса в треугольнике, образованном характеристиками CA и CD . Характеристика CA построена методом характеристик по распределению скорости по оси сопла. Характеристика CD рассчитана при помощи аналитического решения (4.2).



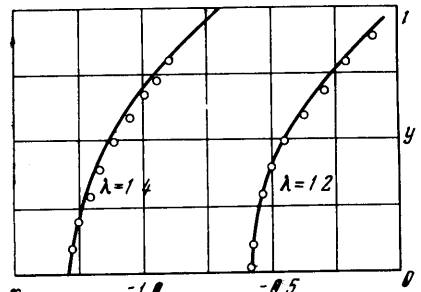
Фиг. 7

$M = 3.0$ для $\kappa = 1.41$, в качестве стенки сопла была выбрана линия тока $\psi = 0.6$. В поле потока сопла с помощью интерферометра получены линии равной скорости и распределение скорости на оси сопла. На фиг. 8 представлено сравнение теоретического (4.3) и экспериментального распределения скорости по оси сопла, на фиг. 9 дано сравнение теоретических и экспериментальных линий равной скорости.

Все имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что кривизна линий равных скоростей при $\lambda < 1.0$ по мере убывания скорости уменьшается и меняет знак. Но согласно имеющимся решениям, основанным на предположении о малом отличии скорости от скорости звука, кривизна линий равной скорости не уменьшается, а увеличивается и не меняет знака по мере уменьшения скорости при $\lambda < 1.0$. Этот факт говорит о том, что построенное решение (4.2) имеет более широкую область применимости по сравнению с решениями, построенными на основе малого возмущения скорости относительно скорости звука.



Фиг. 8



Фиг. 9

Из рассмотрения экспериментальных результатов следует, что предположение о возможности выделения главной части решения (4.2) и о характере области ее применимости хорошо подтверждается экспериментом и точными расчетами.

Автор благодарит С. В. Фальковича за ценные замечания по рассмотренному вопросу.

Поступило 21 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. К теории сопел Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1951.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I, Гостехиздат, 1948.
4. Кацкова О. Н., Наумова А. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. ВЦ АН, 1961.