

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Ж. С. СИСЛЯН

(Москва)

1. Рассмотрим поле возмущенного течения, вызванного неустановившимся движением тонкого профиля, находящегося в равномерном и равновесном потоке газа, движущегося со скоростью U_∞ вдоль положительной оси x в неподвижной системе координат x, z . Предположим, что в этом поле возмущенного течения имеет место неравновесный процесс, как, например, релаксация внутренней степени свободы молекулы или реакция диссоциации молекул двухатомного газа. Влиянием вязкости, теплопроводности и диффузии пренебрегаем. Вследствие тонкости профиля и малости его отклонения от некоторого среднего положения возмущения, вносимые в поток неустановившимся движением профиля, будут малыми, и течение будет мало отличаться от состояния термодинамического равновесия. Как известно [1, 2], возмущенное течение в этом приближении является безвихревым и задача сводится к интегрированию уравнения

$$T_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\lambda_f^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{U_\infty}{a_{f\infty}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{a_{f\infty}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \\ + \left(\lambda_e^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{U_\infty}{a_{e\infty}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{a_{e\infty}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0 \\ (\lambda_f^2 = M_f^2 - 1, \lambda_e^2 = M_e^2 - 1) \quad (1.1)$$

Здесь T_∞ — параметр, пропорциональный времени релаксации θ_∞ (индексом ∞ отмечены величины, относящиеся к невозмущенному потоку), Φ — потенциал возмущенной скорости, $M_f = U_\infty / a_{f\infty}$, $M_e = U_\infty / a_{e\infty}$, $a_{f\infty}$ и $a_{e\infty}$ — соответственно замороженная и равновесная скорости звука. Поскольку a_f всегда больше a_e , то $M_f < M_e$. Граничное условие, выражающее требование, чтобы у профиля поток двигался по касательной к его контуру, имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \text{при } z = 0 \quad (1.2)$$

где $Z = Z(x, t)$ — уравнение движения профиля. Кроме того, потенциал Φ должен удовлетворять условию затухания возмущений на бесконечности. Выражение для давления имеет вид

$$p - p_\infty = -\rho_\infty \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

где ρ_∞ — плотность газа в невозмущенном потоке.

В качестве простого примера влияния неравновесности на характеристики течения рассмотрим случай, когда бесконечная поверхность, расположенная при $z = 0$, деформируется по закону бегущей волны

$$Z = Z_0 \exp [ik(ct - x)] \quad (k = 2\pi / \lambda) \quad (1.4)$$

Здесь k — волновое число, λ — длина волны, c — скорость распространения волны. Если искать потенциал Φ в виде $\Phi = \Phi_0(z) \exp [ik(ct - x)]$, то, решая граничную задачу (1.1) — (1.3) с учетом (1.4) для потенциала Φ и давления, имеем

$$\begin{aligned}\Phi &= -iU_\infty Z_0 \zeta \beta^{-1} \exp [ik(ct - x) - k\beta z] \\ p - p_\infty &= -k\rho_\infty U_\infty^2 \zeta^2 \beta^{-1} Z_0 \exp [ik(ct - x) - k\beta z] \\ \zeta &= \frac{c}{U_\infty} - 1, \quad \beta^2 = \frac{(1 - M_e^2 \zeta^2) + i\Gamma \zeta (1 - M_f^2 \zeta^2)}{1 + i\Gamma \zeta}\end{aligned}$$

Безразмерный параметр $\Gamma = T_\infty U_\infty k$ представляет отношение характерных времен релаксации и колебательного движения. Неустановившееся течение равномерно при $\Gamma \rightarrow 0$ и заморожено при $\Gamma \rightarrow \infty$. Для перепада давления на поверхности имеем

$$p(x, -0) - p(x, +0) = 2k\rho_\infty U_\infty^2 \zeta^2 \beta^{-1} Z \quad (1.5)$$

2. Для описания возмущенного неравновесного поля течения, вызванного неустановившимся движением поверхности круговой бесконечной цилиндрической оболочки радиуса R , находящейся в равномерном и равновесном потоке газа, движущемся вдоль оси x оболочки со скоростью U_∞^i внутри оболочки и U_∞^e во внешней области (верхними индексами i и e будут обозначены параметры течения соответственно внутри оболочки и во внешней области), воспользуемся уравнением для потенциала возмущенной скорости в цилиндрической системе координат x, θ, r (ось x направлена вдоль оси оболочки)

$$\begin{aligned}T_\infty \left(\frac{\partial \Delta_f}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \Delta_f}{\partial x} \right) + \Delta_e = 0, \quad \Delta_j = \lambda_j^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + 2 \frac{U_\infty}{a_{j\infty}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{a_{j\infty}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad j = f \text{ или } e\end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничные условия на движущейся стенке будут

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty^i \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } r = R - 0, \quad \frac{\partial \Phi^e}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty^e \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } r = R + 0$$

где $r = w(x, \theta, t)$ уравнение движения поверхности оболочки. На бесконечности потенциал Φ^e должен удовлетворять условию затухания возмущений $\Phi^e \rightarrow 0$, $\partial \Phi^e / \partial r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Если потенциал Φ^e описывает волновой процесс, то эти условия должны быть заменены условиями излучения $\Phi^e = O(r^{-1/2})$, т. е. интенсивность волн должна убывать как $r^{-1/2}$ по мере удаления от источника. Кроме того, потенциал должен описывать расходящиеся волны, если оболочка излучает энергию, и сходящиеся волны, если оболочка поглощает энергию потока [3].

Предположим, что поверхность оболочки деформируется по закону $w = w_0 \exp [ik(ct - x)] \cos n\theta$. Тогда, представляя потенциал в виде $\Phi = \Phi_1(r) \exp [ik(ct - x)] \cos n\theta$, из уравнения (2.1) получим

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_1}{dr} + \left(v^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_1 = 0 \quad \left(v^2 = k^2 \frac{(M_e^2 \zeta^2 - 1) + i\Gamma \zeta (M_f^2 \zeta^2 - 1)}{1 + i\Gamma \zeta} \right)$$

Решение уравнения (2.2) выражается в следующих функциях Бесселя:

$$\Phi_1 = C_1 J_n(vr) + C_2 N_n(vr) \quad \text{или} \quad \Phi_1 = C_1 H_n^{(1)}(vr) + C_2 H_n^{(2)}(vr)$$

Таким образом, решение поставленной задачи получается из соответствующего решения для инертного газа [3] путем замены значения $v^2 = k^2 (M_e^2 \zeta^2 - 1)$ значением (2.2).

3. Введем безразмерные координаты x, z , отнесенные к величине $l_r = T_\infty U_\infty$, пропорциональной длине релаксации, и безразмерное время t , отнесенное к T_∞ . Предположим, что тонкий профиль совершает малые гармонические колебания с частотой ω в сверхзвуковом равномерном и равновесном потоке газа, движущегося со скоростью U_∞ вдоль положительной оси x . Представим уравнение движения профиля и потенциал возмущенной скорости в виде

$$Z = l_r h_a(x) \exp(i\Gamma t), \quad \Phi = U_\infty l_r \varphi(x, z) \exp(i\Gamma t) \quad (3.1)$$

где $h_a(x)$ и $\varphi(x, z)$ — антисимметричные безразмерные компоненты в разложениях Z и Φ на симметричную и антисимметричную части относительно плоскости $z = 0$ (т. е. рассматривается антисимметричная задача, см., например, [4]). Безразмерный параметр $\Gamma = \omega T_\infty$ представляет собой, как и выше, отношение характерных времен релаксации и колебательного движения и определяет степень неравновесности неустановившегося течения. Подставляя (3.1) в (1.1) — (1.3), получим следующие уравнения в безразмерных координатах x, z , описывающие возмущенное гармоническое неравновесное поле течения:

$$\frac{\partial \Delta_{1f}}{\partial x} + i\Gamma \Delta_{1f} + \Delta_{1e} = 0, \quad \Delta_{1j} = \lambda_j^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2i\Gamma M_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Gamma^2 M_j^2 \varphi \quad (j = f, e) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = i\Gamma h_a(x) + \frac{\partial h_a}{\partial x} = w_a(x) \quad \text{при } z = 0, \quad C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -2 \left(i\Gamma \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

В дальнейшем для решения перейдем к новым независимым переменным

$$\xi = x - \lambda_f z, \quad \eta = \lambda_f z$$

В новых переменных выражения (3.2) и (3.3) примут вид

$$\left(i\Gamma + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Delta_{2f} + (a - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Delta_{2e} = 0, \quad \Delta_{2j} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2i\Gamma \frac{M_j^2}{\lambda_f^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \Gamma^2 \frac{M_j^2}{\lambda_f^2} f \quad (j = f, e; a = \lambda_e^2 / \lambda_f^2, f(\xi, \eta) = \varphi(x, y)) \quad (3.4)$$

$$\lambda_f^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = w_a(\xi) \quad \text{при } \eta = 0, \quad C_p = -2 \left(i\Gamma f + \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (3.5)$$

В силу сверхзвукового характера течения, возмущения будут равны нулю при $x < 0$. Тогда, применяя преобразование Лапласа

$$L[f(\xi, \eta)] = F(s, \eta) = \int_0^\infty f(\xi, \eta) \exp(-s\xi) d\xi$$

к уравнению (3.4), получим

$$(1 + i\Gamma + s) \frac{d^2 F}{d\eta^2} - 2s(1 + i\Gamma + s) \frac{dF}{d\eta} - \left[(a - 1)s^2 + 2i\Gamma \frac{M_f^2}{\lambda_f^2} s(i\Gamma + s) - \Gamma^2 \frac{M_f^2}{\lambda_f^2} (i\Gamma + s) + 2i\Gamma \frac{M_e^2}{\lambda_f^2} s - \Gamma^2 \frac{M_e^2}{\lambda_f^2} \right] F = - \left[2 \frac{\partial}{\partial \eta} + 2i\Gamma \frac{M_f^2}{\lambda_f^2} + (a - 1) \right] \frac{\partial f(0, \eta)}{\partial \xi} + \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2(1 + i\Gamma + s) \frac{\partial}{\partial \eta} - 2i\Gamma \frac{M_f^2}{\lambda_f^2} (i\Gamma + s) - (a - 1)s + \Gamma^2 \frac{M_f^2}{\lambda_f^2} - 2i\Gamma \frac{M_e^2}{\lambda_f^2} \right] f(0, \eta)$$

Приравнивая нулю правую часть этого уравнения (справедливость такого допущения будет доказана ниже), имеем

$$\frac{d^2 F}{d\eta^2} - 2s \frac{dF}{d\eta} - \frac{(a-1)s^2 + (i\Gamma + s)\Delta_{3f} + \Delta_{3e}}{1 + i\Gamma + s} F = 0, \quad \Delta_{3j} = 2i\Gamma \frac{M_j^2}{\lambda_j^2} s - \Gamma^2 \frac{M_j^2}{\lambda_j^2} \quad (j = f, e) \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.6), удовлетворяющее преобразованному граничному условию

$$\lambda_j \left(\frac{dF}{d\eta} - sF \right) = W_a(s) \quad (W_a(s) = L[w_a(\xi)])$$

и условию конечности возмущений на бесконечности, будет

$$F(s, \eta) = - \frac{W_a(s)}{\lambda_j s \delta} e^{-s(\delta-1)\eta} \quad (3.7)$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda_j s} \left[\frac{(\lambda_e^2 s^2 + 2i\Gamma M_e^2 s - \Gamma^2 M_e^2) + (i\Gamma + s)(\lambda_f^2 s^2 + 2i\Gamma M_f^2 s - \Gamma^2 M_f^2)}{1 + i\Gamma + s} \right]^{1/2}$$

Исследуем возмущенное поле течения вблизи начальной замороженной линии Маха, т. е. при $\xi \rightarrow 0$. Для определения значений потенциала f и скоростей $u = \varphi_x = f_\xi$ и $v = \varphi_z = \lambda_j (f_\eta - f_\xi)$ при $\xi = 0$ имеем

$$f(0, \eta) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s, \eta), \quad u(0, \eta) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF - f(0, \eta)] \\ v(0, \eta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_j s \left[\frac{dF}{d\eta} - sF + f(0, \eta) \right] \quad (3.8)$$

При значениях $\xi \rightarrow 0$ функцию $w_a(\xi)$ можно разложить в ряд

$$w_a(\xi) = w_a(0) + w_a'(0)\xi' + \dots \quad (3.9)$$

или

$$W_a(s) = w_a(0)s^{-1} + w_a'(0)s^{-2} + \dots$$

При больших значениях s функции δ и δ^{-1} представляются в виде следующих рядов:

$$\delta = 1 + \kappa s^{-1} + \dots, \quad \delta^{-1} = 1 - \kappa s^{-1} + \dots, \quad \kappa = \frac{a-1}{2} + \frac{i\Gamma M_f^2}{\lambda_f^2} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.8) и переходя к пределу, получим

$$f(0, \eta) = 0, \quad u(0, \eta) = -\lambda_f^{-1} w_a(0) e^{-\kappa \eta}, \quad v = w_a(0) e^{-\kappa \eta} \quad (3.11)$$

Уравнения (3.11) подтверждают предположение, сделанное при выводе уравнения (3.6). Из этих уравнений видно, что вблизи $\xi = 0$ возмущения скорости убывают по экспоненциальному закону при $\eta \rightarrow \infty$.

Вычислим коэффициент давления на поверхности профиля. Из (3.5) для преобразованного коэффициента давления при $\eta = 0$ имеем

$$L[1/2 C_p] = (i\Gamma + s) W_a(s) (\lambda_j s \delta)^{-1} \quad (3.12)$$

Для обращения выражения (3.12) перепишем его в виде

$$L[C_p/2] = (i\Gamma + s) W_a(s) \lambda_f^{-1} s G(s) C(s) \quad (3.13)$$

$$G(s) = \frac{1}{V(s+R)^2 + S^2}, \quad R = a \left(\frac{1}{3} + \frac{3\lambda_f^2 + 2}{3\lambda_e^2} i\Gamma + \frac{\mu + \gamma}{2a} \right), \quad S = \frac{V\sqrt{3}(\mu - \gamma)}{2} \\ C(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1 + i\Gamma + s}{aQ + s} \right)^{1/2}, \quad Q = \frac{1}{3} + \frac{3\lambda_f^2 + 2}{3\lambda_e^2} i\Gamma - \frac{\mu + \gamma}{a}$$

$$u = (3\lambda_f^2)^{-1} [1/2 M + 3\lambda_f^2 \Gamma (3N)^{1/2}]^{1/2}, \quad \gamma = (3\lambda_f^2)^{-1} [1/2 M - 3\lambda_f^2 \Gamma (3N^{1/2})]^{1/2}$$

$$M = 2i\Gamma^3 (9\lambda_f^2 + 8) + 3\Gamma^2 (3\lambda_f^2 \lambda_e^2 - 12\lambda_f^2 + 8\lambda_e^2 - 9\lambda_f^4) + \\ + 6i\Gamma \lambda_e^2 (3\lambda_f^2 - 2\lambda_e^2) - 2\lambda_e^6$$

$$N = \Gamma^4 (\lambda_f^2 + 1) - i\Gamma^3 (3\lambda_f^2 + \lambda_e^2 + 4) + \Gamma^2 (27/4 \lambda_f^2 - 1/4 \lambda_e^2 + 6\lambda_f^2 - \\ - 8\lambda_e^2 - 9/2 \lambda_f^2 \lambda_e^2 - 4) - i\Gamma (8\lambda_f^2 + 9\lambda_e^2 \lambda_f^2 - 5\lambda_e^4 - 4\lambda_e^2) + \lambda_e^6 + \lambda_e^4$$

Применяя дважды теорему о свертке к выражению (3.13), получим следующую формулу для значения коэффициента давления на профиле:

$$\frac{1}{2} C_p = \frac{1}{\lambda_f} \left\{ w_a(0) \Psi(\xi) + \int_0^\xi [w_{a\theta} + i\Gamma w_a(\theta)] \Psi(\xi - \theta) d\theta \right\} \quad (3.14)$$

$$\Psi(\xi) = c(\xi) + \int_0^\xi g_\theta(\theta) c(\xi - \theta) d\theta, \quad g(\xi) = L^{-1}[G(s)] = \exp(-R\xi) J_0(S\xi)$$

$$c(\xi) = L^{-1}[C(s)] = \exp(-m\xi) I_0(n\xi) + (1 + i\Gamma) \int_0^\xi \exp(-m\theta) I_0(n\theta) d\theta \\ m = 1/2(aQ + 1 + i\Gamma), \quad n = 1/2(aQ - 1 - i\Gamma)$$

Здесь J_0 и I_0 соответственно функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. При $\omega = 0$ (установившийся случай) $\Psi(\xi) = c(\xi)$, и формула (3.14) совпадает с формулой, полученной в работе [5], для случая установившегося сверхзвукового неравновесного обтекания тонкого профиля.

Формулу (3.14) можно упростить, если учесть, что в рассматриваемом случае, когда в возмущенном течении имеет место лишь один неравновесный процесс, значения замороженной и равновесной скоростей звука a_f и a_e близки [6]. Так, например, в работе [1] подходящим значением отношения a_f/a_e считается $11/10$, в работе [7] для a_f/a_e принимается значение 1.16. Полагая поэтому $\lambda_e^2 = \lambda_f^2(1 + \epsilon)$, где ϵ — малая величина (квадратами и более высокими степенями ϵ пренебрегаем), преобразуем выражение (3.12) к виду

$$L\left[\frac{C_p}{2}\right] = \frac{1}{\lambda_f} (i\Gamma + s) W_a(s) \left[\left(s + \frac{i\Gamma M_f^2}{\lambda_f^2} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma M_f}{\lambda_f^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 - \right. \\ \left. - \frac{\epsilon}{2} (s + i\Gamma)^2 \left[(1 + i\Gamma + s) \left(\frac{i\Gamma M_f}{M_f + 1} + s \right) \left(\frac{i\Gamma M_f}{M_f - 1} + s \right) \right]^{-1} \right\} \quad (3.15)$$

Обращая выражение (3.15), получим следующую упрощенную формулу для давления на профиле:

$$\frac{1}{2} C_p = \frac{1}{\lambda_f} \left\{ w_a(\xi) + \int_0^\xi [g_\xi(\xi - \theta) + i\Gamma g(\xi - \theta)] w_a(\theta) d\theta \right\} - \frac{\epsilon}{2\lambda_f} \int_0^\xi \left\{ w_a(\rho) + \right. \\ \left. + \int_0^\rho [g_\rho(\rho - \theta) + i\Gamma g(\rho - \theta)] w_a(\theta) d\theta \right\} \left\{ \frac{\lambda_f^2 \exp[-(1 + i\Gamma)(\xi - \rho)]}{\lambda_f^2 - 2i\Gamma + \Gamma^2} - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(M_f - 1) \exp[-i\Gamma M_f(M_f + 1)^{-1}(\xi - \rho)]}{2iM_f(M_f + 1 + i\Gamma)} + \frac{\Gamma(M_f + 1) \exp[-i\Gamma M_f(M_f - 1)^{-1}(\xi - \rho)]}{2iM_f(M_f - 1 - i\Gamma)} \right\} d\rho \\ g(\xi) = \exp\left(-\frac{i\Gamma M_f^2}{\lambda_f^2} \xi\right) J_0\left(\frac{\Gamma M_f}{\lambda_f^2} \xi\right) \quad (3.16)$$

При $\omega = 0$ имеем

$$\frac{C}{2} = \frac{1}{\lambda_f} \left[w_a(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\xi} w_a(\theta) \exp[-(\xi - \theta)] d\theta \right]$$

что с точностью до ε^2 совпадает с формулой, полученной в работе [6] при аналогичных предположениях, но другим путем, для случая сверхзвукового установившегося обтекания тонкого профиля.

4. При малых значениях параметра Γ , т. е. в случае низкочастотных гармонических колебаний тонкого профиля, когда возмущенное течение близко к равновесному, решение уравнения (3.6) можно искать в виде разложения в ряд по параметру Γ

$$F = F_0 + \Gamma F_1 + \Gamma^2 F_2 + \dots \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в (3.6), получим следующие уравнения для нулевого и первого приближений соответственно:

$$\frac{d^2 F_0}{d\eta^2} - 2s \frac{dF_0}{d\eta} - \frac{a-1}{1+s} s^2 F_0 = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2 F_1}{d\eta^2} - 2s \frac{dF_1}{d\eta} - \frac{a-1}{1+s} s^2 F_1 = i \frac{M_j^2 s}{\lambda_f^2 (1+s)^2} [2s^2 + (B^2 + 3)s + 2B^2] F_0$$

$$\left(B^2 = \frac{M_e^2}{M_j^2} \right) \quad (4.3)$$

Разложим функцию $W_a(s)$ в ряд по Γ

$$W_a(s) = W_{a0} + \Gamma W_{a1} + \dots,$$

получим граничные условия для функций $F_0(s, \eta)$ и $F_1(s, \eta)$

$$\lambda_f \left(\frac{dF_0}{d\eta} - sF_0 \right) = W_{a0}(s), \quad \lambda_f \left(\frac{dF_1}{d\eta} - sF_1 \right) = W_{a1}(s) \quad (4.4)$$

Уравнение (4.2) вместе с граничным условием (4.4) описывает решение стационарной задачи, рассмотренной в работе [5]. Для $F_0(s, \eta)$ имеем

$$F_0 = -W_{a0}(s) \Omega(s) e^{-s(\delta_0-1)\eta}, \quad \Omega(s) = \frac{1}{\lambda_f s \delta_0}, \quad \delta_0 = \left(\frac{a+s}{1+s} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.3), удовлетворяющее граничному условию (4.4) и условию затухания возмущений на бесконечности, имеет вид

$$F_1 = [-W_{a1}(s) \Omega(s) + iW_{a0}(s) \Omega(s) \Theta(s) + i\lambda_f^{-1} W_{a0}(s) \Theta(s) \eta] e^{-s(\delta_0-1)\eta}$$

$$\Theta(s) = \frac{M_j^2 [2s^2 + (B^2 + 3)s + 2B^2]}{2\lambda_f^2 s (1+s)(a+s)} \quad (4.6)$$

Для преобразованной величины безразмерного перепада давления P на профиле, характеризующего местную удельную подъемную силу профиля, с учетом (3.5) и (4.1) имеем

$$L[P] = L \left[\frac{p(\xi, -0) - p(\xi, +0)}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2} \right] = 4 [sF_0 + \Gamma (sF_1 + iF_0)] \quad (4.7)$$

или, подставляя выражения (4.5) и (4.6) при $\eta = 0$ в (4.7)

$$L[P] = -4 [sW_a(s) \Omega(s) - i\Gamma sW_{a0}(s) \Omega(s) \Theta(s) + i\Gamma W_{a0}(s) \Omega(s)] \quad (4.8)$$

Обращая (4.8), получим для перепада давления на профиле:

$$P = -\frac{4}{\lambda_f} \left[w_a(0) c(\xi) + \int_0^\xi w_a'(\theta) c(\xi - \theta) d\theta - i\Gamma \int_0^\xi G(\theta) E(\xi - \theta) d\theta + \right. \\ \left. + i\Gamma \int_0^\xi w_{a0}(\theta) c(\xi - \theta) d\theta \right] \quad (4.9)$$

$$c(\xi) = L^{-1} [(s\delta_0)^{-1}] = \exp\left(-\frac{a+1}{2}\xi\right) I_0\left(\frac{a-1}{2}\xi\right) + \\ + \int_0^\xi \exp\left(-\frac{a+1}{2}\theta\right) I_0\left(\frac{a-1}{2}\theta\right) d\theta$$

$$G(\xi) = L^{-1} [sW_{a0}(s) \Omega(s)] = \frac{1}{\lambda_f} \left[w_{a0}(0) c(\xi) + \int_0^\xi w_{a0}'(\theta) c(\xi - \theta) d\theta \right]$$

$$E(\xi) = L^{-1} [\Theta(s)] = \frac{M_e^2}{\lambda_e^2} - \frac{1}{2} e^{-\xi} + \frac{2a^2 - (B^2 + 3)a + 2B^2}{2\lambda_f^2 a(a-1)} e^{-a\xi}$$

В качестве примера применения формулы (4.9) рассмотрим задачу о неустойчивости продольных гармонических колебаний профиля с одной степенью свободы. Гармонические продольные колебания относительно оси $\xi = \xi_0$ описываются распределениями смещений $h(\xi, t) = \alpha (\xi_0 - \xi) \exp(i\Gamma t)$.

Отсюда $w_a(\xi) = -\alpha [1 + i\Gamma(\xi - \xi_0)] = w_{a0} + \Gamma w_{a1} \quad (4.10)$

Подставляя (4.10) в (4.9), получим

$$P(\xi) = \frac{4\alpha}{\lambda_f} [(1 - i\Gamma\xi_0) c(\xi) + i\Gamma A_1(\xi) - i\Gamma A_2(\xi) + i\Gamma A_1(\xi)] \\ A_1(\xi) = \int_0^\xi c(\theta) d\theta, \quad A_2(\xi) = \int_0^\xi c(\theta) E(\xi - \theta) d\theta \quad (4.11)$$

Первые два члена в квадратных скобках описывают квазистационарное течение, а два последних члена представляют собой добавок за счет нестационарности обтекания. Безразмерный момент (положительный, если он действует в направлении увеличения угла атаки), обусловленный полученным распределением подъемной силы $P(\xi)$, равен

$$C_M = \int_0^\Lambda P(\xi) (\xi_0 - \xi) d\xi = \alpha [C_{M_\alpha} + i\Gamma (C_{M_q} + C_{M_\alpha})] \quad (4.12)$$

где $\Lambda = l/l_r$ — отношение длины профиля к релаксационной длине, C_{M_α} — статический момент, C_{M_q} — квазистационарное продольное демпфирование, а C_{M_α} — добавок, связанный с нестационарностью течения.

Подставляя (4.11) в (4.12), найдем

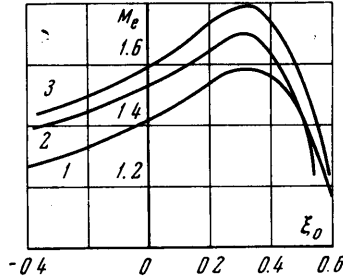
$$C_{M_\alpha} = \frac{4}{\lambda_f} [\xi_0 A_1(\Lambda) - A_3(\Lambda)], \quad A_3(\xi) = \int_0^\xi \theta c(\theta) d\theta \quad (4.13)$$

$$C_{M_q} = -\frac{4}{\lambda_f} \left[\xi_0^2 A_1(\Lambda) - \xi_0 A_3(\Lambda) + \int_0^\Lambda (\xi - \xi_0) A_1(\xi) d\xi \right] \quad (4.14)$$

$$C_{M_\alpha} = \frac{4}{\lambda_f} \left[\int_0^\Lambda (\xi - \xi_0) A_2(\xi) d\xi - \int_0^\Lambda (\xi - \xi_0) A_1(\xi) d\xi \right] \quad (4.15)$$

При некоторых значениях числа M_f и абсциссы ξ_0 значение суммарного момента $C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}$, характеризующее демпфирование, может быть отрицательным. Таким образом, границу устойчивости продольных гармонических колебаний профиля с одной степенью свободы можно получить, если положить

$$C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}} = 0 \quad (4.16)$$



На фигуре приведены кривые (границы устойчивости), полученные из уравнения (4.16) путем численного интегрирования выражений (4.15) и (4.14) для $\Lambda = \infty$ (равновесный случай) и $\Lambda = 1$ и 0.4 (кривые 1, 2, 3 соответственно). Как видно из рассмотрения кривых, наличие неравновесного процесса увеличивает область неустойчивости колебаний (область внутри кривых).

5. При больших значениях Γ , т. е. в случае высокочастотных гармонических колебаний тонкого профиля в сверхзвуковом неравновесном потоке газа, когда возмущенное течение близко к замороженному, уравнение (3.2) можно решить путем асимптотического разложения потенциала возмущенной скорости по параметру Γ [8]. В этом методе граничное условие (3.3) удовлетворяется на поверхности профиля, а не при $z = 0$, т. е. имеем граничное условие

$$\partial \varphi / \partial n = w \quad \text{при } n = 0 \quad (5.1)$$

(n — безразмерная нормаль к поверхности профиля, w — безразмерная нормальная к поверхности профиля составляющая скорости), позволяющее учитывать форму профиля в окончательных формулах. Потенциал возмущенной скорости должен удовлетворять также условию излучения, согласно которому на бесконечности функция $\varphi(x, z) \exp(i\Gamma t)$ должна описывать расходящуюся волну конечной интенсивности.

Представим функцию $\varphi(x, z)$ в виде

$$\varphi(x, z) = \Gamma^m [\Gamma^{-1} \chi_1(x, z) + \Gamma^{-2} \chi_2(x, z) + \dots] \exp[i\Gamma \psi(x, z)] \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (3.2) и (5.1) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях Γ , получим следующие уравнения для определения функций $\psi(x, z)$ и $\chi_1(x, z)$:

$$\lambda_f^2 \psi_x^2 - (3M_f^2 - 1)\psi_x^2 + \psi_z^2 - \psi_z^2 \psi_x + 3M_f^2 \psi_x - M_f^2 = 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} & [\psi_z^2 - 3\lambda_f^2 \psi_x^2 + 2(3M_f^2 - 1)\psi_x - 3M_f^2] \chi_{1x} + 2\psi_z (\psi_x - 1) \chi_{1z} + \\ & + [(3M_f^2 - 1)\psi_{xx} + \psi_{zz} (\psi_x - 1) - 3\lambda_f^2 \psi_x \psi_{xx} + 2\psi_z \psi_{zx} - \\ & - \lambda_e^2 \psi_x^2 + \psi_z^2 + 2M_e^2 \psi_x - M_e^2] \chi_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

(здесь и в дальнейшем индексы обозначают дифференцирование по соответствующим координатам). Уравнения для определения функций $\chi_r(x, z)$, ($r \geq 2$) аналогичны уравнению (5.4) с известными правыми частями. Граничные условия для функций $\psi(x, z)$ и $\chi_r(x, z)$ будут

$$\psi(x, z) = 0, \quad \chi_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} = iw, \quad \chi_r \frac{\partial \psi}{\partial n} = -i \frac{\partial \chi_{r-1}}{\partial n} \quad (r \geq 2) \quad \text{при } n = 0 \quad (5.5)$$

Из условия (5.1) вытекает также, что $m = 0$.

Решение уравнения (5.3) эквивалентно решению следующей характеристической системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\sigma} &= H_p, & \frac{dz}{d\sigma} &= H_q, & \frac{d\psi}{d\sigma} &= pH_p + qH_q, & p &= \psi_x \\ \frac{dp}{d\sigma} &= -(pH_\psi + H_x), & \frac{dq}{d\sigma} &= -(qH_\psi + H_z) & q &= \psi_x \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$2H = [(M_f^2 - 1)p^3 - (3M_f^2 - 1)p^2 + q^2(1 - p) + 3M_f^2p - M_f^2],$$

Параметр σ изменяется вдоль характеристических линий решения. Дифференциальное уравнение (5.3) будет $H = 0$.

Граничные условия для характеристической системы (5.6) будут (примем, что на поверхности профиля $\sigma = 0$)

$$\psi = 0, \quad x = x_0(\tau), \quad z = z_0(\tau), \quad p = p_0(\tau), \quad q = q_0(\tau) \quad \text{при } \sigma = 0 \quad (5.7)$$

где $x = x_0(\tau)$ и $z = z_0(\tau)$ — безразмерное параметрическое уравнение поверхности профиля (параметр τ увеличивается при движении по поверхности профиля по часовой стрелке, движение профиля в параметрическом виде задано в виде $X = x_0(\tau) \exp(i\Gamma t)$, $Z = z_0(\tau) \exp(i\Gamma t)$).

Величины $p_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$ можно определить из уравнения

$$H[p_0(\tau), q_0(\tau)] = 0$$

и условия постоянства $\psi(x, z)$ на поверхности профиля

$$p_0(\tau)x_0'(\tau) + q_0(\tau)z_0'(\tau) = 0$$

и для течения, удовлетворяющего условию излучения (т. е. описывающего расходящиеся волны), равны

$$p = -\frac{M_f \sin \theta(\tau)}{1 - M_f \sin \theta(\tau)}, \quad q_0 = \frac{M_f \cos \theta(\tau)}{1 - M_f \sin \theta(\tau)}, \quad \begin{aligned} x_0'(\tau) &= l'(\tau) \cos \theta(\tau) \\ z_0'(\tau) &= l'(\tau) \sin \theta(\tau) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь $\theta(\tau)$ — наклон контура профиля, $l(\tau)$ — безразмерная длина вдоль контура профиля. Решая характеристическую систему (5.6) с граничными условиями (5.7) и (5.8), получим

$$\begin{aligned} p &= p_0, \quad q = q_0, \quad x = x_0(\tau) + \frac{M_f - \sin \theta(\tau)}{1 - M_f \sin \theta(\tau)} \sigma, \quad \psi = \frac{M_f}{1 - M_f \sin \theta(\tau)} \sigma \\ z &= z_0(\tau) + \frac{\cos \theta(\tau)}{1 - M_f \sin \theta(\tau)} \sigma \end{aligned} \quad (5.9)$$

или, исключая σ

$$z = z_0(\tau) + \frac{\cos \theta(\tau)}{M_f} \psi, \quad x = x_0(\tau) + \frac{M_f - \sin \theta(\tau)}{M_f} \psi$$

Таким образом, решение для функции $\psi(x, z)$ совпадает с соответствующим решением для ψ в случае инертного газа [2], где, однако, число Маха заменено замороженным числом Маха M_f .

Для определения функции $\chi_1(x, z)$ перейдем от координат x, z к характеристическим координатам τ, σ при помощи формул перехода

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\Delta \cos \theta(\tau)}{l'(\tau)}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\Delta [M_f - \sin \theta(\tau)]}{l'(\tau)} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \Delta \left[-\sin \theta (1 - M_f \sin \theta) + \frac{M_f - \sin \theta}{1 - M_f \sin \theta} \frac{\sigma}{R} \right]$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \Delta \cos \theta \left[1 - M_f \sin \theta - \frac{M_f^2 - 1}{1 - M_f \sin \theta} \frac{\sigma}{R} \right] \quad \Delta = [1 - M_f \sin \theta(\tau) + R^{-1}(\tau)\sigma]^{-1}$$

Здесь $R(\tau) = -l'(\tau)/\theta'(\tau)$ безразмерный радиус кривизны контура профиля. В новых координатах уравнение (5.4) примет вид

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{[1 - M_f \sin \theta(\tau)] R(\tau) + \sigma} + \frac{M_f (B^2 - 1)}{[1 - M_f \sin \theta(\tau)]} \right\} \chi_1 = 0 \quad (5.11)$$

а для граничного условия при $\sigma = 0$ имеем из (5.5)

$$\chi_1 \frac{d\psi}{dn} = \chi_1 \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \theta \right) = \frac{M_f}{1 - M_f \sin \theta(\tau)} \chi_1 = iw(\tau) \quad (5.12)$$

Решая уравнение (5.11) с граничным условием (5.12), для потенциала возмущенной скорости из (5.2) и (5.9) получим

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{iw\Gamma^{-1}}{M_f} (1 - M_f \sin \theta) \left[1 + \frac{\sigma}{(1 - M_f \sin \theta) R} \right]^{-1/2} \times \\ & \times \exp \left[-\left(i\Gamma + \frac{B^2 - 1}{2} \right) M_f (1 - M_f \sin \theta)^{-1} \sigma \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Легко видеть, что потенциал возмущенной скорости удовлетворяет также условию излучения.

Определим коэффициент давления на поверхности профиля. Из (3.3) и (5.2) имеем (при $\sigma = 0$)

$$\frac{C_p}{2} = -2 \left(i\Gamma \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -2 \left[i \frac{\chi_1}{1 - M_f \sin \theta} + \Gamma^{-1} \left(\frac{i\chi_2}{1 - M_f \sin \theta} + \chi_{1x} \right) \right] \quad (5.14)$$

Из граничных условий (5.5) имеем

$$\chi_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} = -i \frac{\partial \chi_1}{\partial n}, \quad \chi_2 = -\frac{i(1 - M_f \sin \theta)}{M_f} (\chi_{1z} \cos \theta - \chi_{1x} \sin \theta) \text{ при } \sigma = 0 \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в (5.14), и переходя к координатам τ, σ , получим

$$C_p = -2 \left[\frac{i\chi_1}{1 - M_f \sin \theta} + \Gamma^{-1} \frac{1 - M_f \sin \theta}{M_f} \frac{\partial \chi_1}{\partial \sigma} + O(\Gamma^{-2}) \right] \quad (5.16)$$

Значения функций χ_1 и $\partial \chi_1 / \partial \sigma$ при $\sigma = 0$ можно определить из (5.11) и (5.12). Тогда для амплитуды коэффициента давления на поверхности профиля, с учетом первых двух приближений в разложении (5.2), получим

$$C_p = 2 \frac{w}{M_f} \left\{ 1 + i\Gamma^{-1} \frac{1 - M_f \sin \theta}{2M_f} \left[\frac{1}{R} + M_f (B^2 - 1) \right] \right\} \quad (5.17)$$

Поступило 17 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Vincent W. G. Non-equilibrium flow over a wavy wall. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, part 4, p. 481—496.
2. Стаханов И. П., Ступоченко Е. В. О некоторых вопросах гидродинамики релаксирующих сред. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1963, № 2, стр. 3—20.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, 1961.
4. Майлс Дж. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. Физматгиз, 1963.
5. Der J. J. Linearized supersonic non-equilibrium flow past an arbitrary boundary. NASA Techn. Rept, 1961, No. R — 119.
6. Moore F. K., Gibson W. E. Propagation of weak disturbances in a gas subject to relaxation effects. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, No 2, p. 117—127.
7. Clarke J. F. The linearized flow of a dissociating gas. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, No. 4, p. 577—595.
8. Meir H. High frequency oscillations of supersonic airfoils. Bull. Res. Council Israel, 1960, vol. 8C, No. 1, p. 25—34.