

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ОДНОМЕРНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Н. С. ГАЛЮЦ, А. Н. КРАЙКО

(Москва)

В работе [1] задача оптимального профилирования сверхзвуковой части плоского или осесимметричного сопла при неравновесном течении сведена к краевой задаче для гиперболической системы уравнений, включающей уравнения течения и уравнения для множителей Лагранжа. Ввиду сложности ее решения в работе проведено аналогичное исследование, основанное на одномерной постановке.

Решение иллюстрируется примерами. Отмечено, что попытка подобного решения, предпринятая в работе [2], ошибочна.

1. Рассмотрим уравнения одномерного неравновесного течения. Направим ось x по оси сопла и начало координат поместим в некотором сечении a . Параметрам в сечениях $a, b, \dots$ будем приписывать соответствующие нижние индексы. Пусть y — ордината стенки сопла. При пренебрежении эффектами вязкости и теплопроводности рассматриваемое течение описывается уравнениями

$$\rho w w' + p' = 0 \quad \text{[(движения)]} \quad (1.1)$$

$$\rho w y^{v+1} = \rho_a w_a y_a^{v+1} \quad \text{(неразрывности)} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{2} w^2 + h = H \quad \text{(энергии)} \quad (1.3)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, h — удельная энтальпия, w — скорость газа, $v = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях, $H = \frac{1}{2} w_a^2 + h_a$ — константа, штрихом обозначены производные по x . Пусть термодинамическое состояние газа определяется давлением, температурой T поступательных степеней свободы некоторого компонента газа и n параметрами q_i , связанными с неравновесными процессами ($i = 1, \dots, n$). Ими могут быть массовые концентрации компонентов, энергии различных степеней свободы и т. п. Введем n -мерный вектор $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, и зависимости типа $f(q_1, \dots, q_n)$ будем писать в виде $f(\mathbf{q})$. Уравнение состояния и выражение для h имеют вид

$$\rho = \rho(p, T, \mathbf{q}), \quad h = h(p, T, \mathbf{q}) \quad (1.4)$$

Изменение параметров $\mathbf{q}$ описывается уравнениями

$$\mathbf{q}' - w^{-1} \mathbf{F}(p, T, \mathbf{q}) = 0 \quad (1.5)$$

где $\mathbf{F}$ — вектор с компонентами F_i ; F_i — скорость изменения параметра q_i , причем его равновесное значение определяется равенством $F_i(p, T, \mathbf{q}) = 0$; правые части (1.4) и F_i — известные функции p, T и $\mathbf{q}$. Введение n -мерных векторов и использование правил их умножения обеспечивает большую компактность изложения.

Уравнения (1.2)–(1.4) определяют T, ρ, h и w через y, p и $\mathbf{q}$.

Отсюда найдем вариации $\delta T, \delta \rho$ и δh через $\delta y, \delta p$ и $\delta \mathbf{q}$

$$\begin{aligned} \delta T &= y^{-1} T^{(1)} \delta y + T^{(2)} \delta p + T \delta \mathbf{q} \\ \delta \rho &= y^{-1} \rho^{(1)} \delta y + \rho^{(2)} \delta p + \rho \delta \mathbf{q} \\ \delta h &= y^{-1} h^{(1)} \delta y + h^{(2)} \delta p + h \delta \mathbf{q} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$T^{(1)} = (\nu + 1)\rho w^2 D^{-1}, \quad T^{(2)} = (\rho_p w^2 - \rho h_p) D^{-1}, \quad T_i = (\rho_{q_i} w^2 - \rho h_{q_i}) D^{-1}$$

$$\rho^{(1)} = \rho_T T^{(1)}, \quad \rho^{(2)} = \rho_p + \rho_T T^{(2)}, \quad \rho_i = \rho_{q_i} + \rho_T T_i, \quad h^{(1)} = h_T T^{(1)}$$

$$h^{(2)} = h_p + h_T T^{(2)}, \quad h_i = h_{q_i} + h_T T_i, \quad D = \rho h_T - \rho_T w^2$$

$$\rho_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, q}, \quad \rho_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, q}, \quad \rho_{q_i} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right)_{p, T, q_j \neq q_i}$$

$$h_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p, q}, \quad h_p = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T, q}, \quad h_{q_i} = \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \right)_{p, T, q_j \neq q_i}$$

Здесь T , ρ и h — векторы с компонентами T_i , ρ_i и h_i . Соотношения (1.6) сохраняются при замене вариаций производными.

При решении вариационной задачи вместо (1.1) и (1.5) удобно взять уравнения

$$L \equiv p' - \rho h' = 0 \quad (1.7)$$

$$L \equiv q' - y^{v+1} \omega(p, T, p) = 0 \quad (\omega = F\rho / \rho_a w_a y_a^{v+1}) \quad (1.8)$$

Здесь L — вектор с компонентами L_i . В то же время при численном интегрировании вместо (1.1) или (1.7) лучше использовать уравнение

$$T' = \frac{(\nu + 1)(1 - \rho h_p) w^2}{y h_T (1 - M^2)} y' + \frac{(\rho_p w^2 - \rho h_p) h + h_T (1 - M^2) T}{h_T (1 - M^2)} q' \quad (1.9)$$

полученное из (1.7) с учетом (1.6). В (1.9) величина $M = w / c$ — число Маха, определенное по замороженной скорости звука c

$$c^2 = \rho_p + \rho_T (1 - \rho h_p) / \rho h_T$$

Удобно считать, что все переменные — безразмерные величины. Припишем размерным величинам индекс $^\circ$. Приведение к безразмерному виду достигается делением x° и y° на l° и y_a° соответственно, скорости — на w° , плотности — на ρ° , давления — на $\rho^\circ (w^\circ)^2$, температуры — на $R^{-1} (w^\circ)^2$ и энтальпии — на $(w^\circ)^2$, где l° , w° и ρ° — константы с размерностями длины, скорости и плотности, R — газовая постоянная некоторого компонента. Приведение к безразмерному виду параметров q_i проводится с учетом их размерностей, при этом в ω_i появляются безразмерные множители, включающие константы скоростей соответствующих процессов. Величина указанных множителей характеризует близость этих процессов к равновесным.

Прежде чем переходить к формулировке и решению вариационной задачи, укажем границы применимости используемых уравнений. Эти границы определяются условиями, обеспечивающими одномерность и непрерывность течения, и могут быть даны в виде ограничений на угол раскрытия сопла и кривизну контура. Ниже рассматриваются только ограничения на угол раскрытия сопла, которые запишем в виде неравенств

$$0 \leq y' \leq k < \infty \quad (1.10)$$

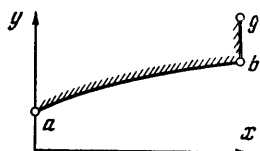
где k — некоторая константа. Ограничение y' снизу призвано обеспечить отсутствие ударных волн, т. е. непрерывность течения, в то время как ограничение сверху вызвано тем, что для обеспечения одномерности угол раскрытия сопла не должен быть слишком большим. Введение дополнительных ограничений на кривизну (или y'') не вносит принципиальных изменений в решение вариационной задачи.

2. Пусть при $x \leq 0$ форма сопла задана, и $M_a \geq 1$. В этом случае параметры течения в сечении a известны и не зависят от формы сопла при $x > 0$. В рассматриваемой задаче требуется построить контур ag сверхзвуковой части сопла максимальной тяги при известных параметрах в сечении a и заданных максимально допустимой длине и максимально допустимом поперечном размере Y . Если принять максимально допустимую длину сопла за характерный размер l° , то $0 \leq x \leq 1$. Как показано в [8], при ограничении на длину оптимальный контур может содержать торец bg , где $x \equiv 1$. При этом необходимо знать давление p_∞ на торец, кото-

рое будем считать заданным и не зависящим от формы искомого контура. Это выполняется, в частности, при истечении в пустоту, когда $p_\infty = 0$.

Так как искомым контур (фиг. 1) состоит из участка ab , обтекаемого газом, и торца bg , на который действует постоянное давление p_∞ , то сила χ , действующая на ag , с точностью до несущественного положительного множителя равна

$$\chi = \int_{x_a}^{x_b} y^v p y' dx + p_\infty \int_{y_b}^{y_g} y^v dy \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Отметим, что точки b и g могут совпадать, т. е. торец может отсутствовать.

Для любого заданного сопла распределение давления находится из (1.2) — (1.5), (1.7) и (1.8). Следовательно, определяется и величина χ . Оптимальным является контур, обеспечивающий максимальное значение χ . Класс кривых $y = y(x)$, среди которых ищется оптимальный контур, ограничен. Он определяется неравенствами (1.10) — границами применимости используемых уравнений и условиями

$$1 \leq y(x) \leq 1 + kx \leq Y, \quad 0 = x_a \leq x \leq x_b \leq x_g = 1 \quad (2.2)$$

которые есть следствия (1.10) и ограничений, наложенных на размеры сопла. Сформулируем вариационную задачу. Среди допустимых функций $y(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $T(x)$, $h(x)$ и $w(x)$, удовлетворяющих конечным связям (1.2) — (1.4), дифференциальным связям (1.7) и (1.8) и условиям (1.10) и (2.2), найти те, которые реализуют максимум функционала (2.1).

3. Для решения вариационной задачи составим функционал

$$\Sigma = \int_{x_a}^{x_b} (y^v p y' + \lambda L + \mu L) dx + p_\infty \int_{y_b}^{y_g} y^v dy$$

Здесь μ — n -мерный вектор с компонентами μ_i ; $\lambda(x)$ и $\mu_i(x)$ — множители Лагранжа. При любом допустимом варьировании вариации Σ и χ , в силу (1.7) и (1.8), совпадают. Найдем первую вариацию Σ .

Так как контур ab может состоять из ряда участков, в точках стыковки которых могут иметься изломы, то при варьировании первый интеграл в Σ разобьем на сумму интегралов по участкам непрерывности y' . Предельным значениям производных и вариаций слева (справа) от излома припишем нижний индекс минус (плюс). При варьировании контура меняются как форма, так и протяженность отдельных участков.

Если Δx и Δy — изменения абсциссы и ординаты точки излома, то можно показать, что $\Delta y = y_{\mp}' \Delta x + \delta y_{\mp}$, и вариации любой переменной z с разных сторон излома связаны соотношением $\delta z_+ = \delta z_- + (z_- - z_+) \Delta x$. Сами же параметры течения в таких точках непрерывны.

После исключения вариаций от производных при помощи интегрирования по частям в $\delta \Sigma$ в виде внеинтегральных членов появляются вариации x , y , p , q и h в сечениях a , b и в точках стыковки. Так как параметры в a заданы, то $\Delta x_a = \delta y_a = \delta p_a = \delta h_a = \delta q_a = 0$. Если, пользуясь произволом в выборе множителей Лагранжа, положить

$$\lambda_- = \lambda_+, \quad \mu_- = \mu_+ \quad (3.1)$$

то в силу отмеченных обстоятельств и уравнений (1.7) и (1.8) вариации в точках стыковки также исчезают.

В подынтегральном выражении вариации δT , δp и δh исключим при помощи (1.6), а $\mu \delta \omega$ представим в виде

$$\mu \delta \omega = y^{-1} \mu \omega^{(1)} \delta y + \mu \omega^{(2)} \delta p + \Omega \delta q$$

$$\omega_i^{(1)} = \omega_{iT} T^{(1)}, \quad \omega_i^{(2)} = \omega_{ip} + \omega_{iT} T^{(2)}, \quad \Omega_i = (\mu \omega)_{q_i} + (\mu \omega)_T T_i$$

Здесь индексами T , p и q_i обозначены соответствующие частные производные, а ω , $\omega^{(1)}$ и Ω — векторы с компонентами $\omega_i^{(1)}$, $\omega_i^{(2)}$ и Ω_i .

С учетом отмеченных обстоятельств получим

$$\delta\chi = \delta\Sigma = \int_{x_a}^{x_b} (W^{(1)}\delta y + W^{(2)}\delta p + W\delta q) dx + \lambda_b (\delta p - \rho\delta h)_b + \\ + \mu_b \delta q_b + (p_b - p_\infty) y_b^v \delta y_b + (p_b - p_\infty) y_b^v y_b' \Delta x_b \quad (3.2)$$

Здесь $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и W — известные функции y , параметров течения и множителей Лагранжа, W — n -мерный вектор с компонентами W_i , индекс b приписан левым предельным значениям параметров в точке b .

4. Рассмотрим различные члены в (3.2). Для любого контура некоторые из них можно обратить в нули специальным выбором множителей Лагранжа. Определим λ и μ так, чтобы на участках непрерывности y' исчезли коэффициенты $W^{(2)}$ и W . Отсюда с учетом выражений для $W^{(2)}$ и W и некоторых преобразований с использованием (1.7) и (1.8) найдем, что на этих участках λ и μ определяются уравнениями

$$\lambda' = \frac{\lambda(\rho^{(1)}h^{(2)} - h^{(1)}\rho^{(2)}) + (v+1)y^{v+1}}{y\rho h_\tau(1-M^2)} Dy' + \frac{\lambda(h^{(2)}\rho - \rho^{(2)}h)\omega - \mu\omega^{(2)}}{\rho h_\tau(1-M^2)} Dy^{v+1} \quad (4.1)$$

$$\mu' = \rho h \lambda' + \frac{(\rho^{(1)}h - h^{(1)}\rho)(1-M^2)h_\tau + (\rho^{(2)}h - h^{(2)}\rho)Dh^{(1)}}{y h_\tau(1-M^2)} \lambda y' + \\ + y^{v+1} \left\{ \lambda \left[\omega \times (h \times \rho) + \frac{\rho^{(2)}h - h^{(2)}\rho}{h_\tau(1-M^2)} D(h\omega) \right] - \Omega \right\} \quad (4.2)$$

В точках излома λ и μ непрерывны в силу (3.1). Отметим, что их непрерывность обеспечивается и без использования (3.1), если (4.1) и (4.2) использовать и при прохождении точек излома. В качестве начальных условий для интегрирования (4.1) и (4.2) возьмем

$$\lambda_b = 0, \mu_b = 0 \quad (4.3)$$

Теперь в соответствии с выбором множителей Лагранжа для любого контура

$$\delta\chi = \delta\Sigma = \int_{x_a}^{x_b} W^{(1)}\delta y dx + (p_b - p_\infty) y_b^v \delta y_b + (p_b - p_\infty) y_b^v y_b' \Delta x_b \quad (4.4)$$

Здесь

$$W^{(1)} = y^v h_\tau^{-1} (1-M^2)^{-1} \{ (\omega h) (\lambda - y^{v+1}) D - \\ - h_\tau \mu [(1-M^2)(\omega + \omega^{(1)}) + (v+1)\rho\omega^2\omega^{(2)}] \} \quad (4.5)$$

При получении выражения для $W^{(1)}$ использованы (1.7), (1.8), (4.1) и равенство $\rho h = \rho h^{(1)} - h\rho^{(1)}$, вытекающее из определения $\rho^{(1)}$, $h^{(1)}$, ρ и h . Отсутствие в $W^{(1)}$ производных y' и y'' указывает на двукратную вырожденность рассматриваемой вариационной задачи.

5. Условия, определяющие форму оптимального контура, найдем из рассмотрения коэффициентов перед вариациями в правой части (4.4). При этом следует помнить, что искомый контур может состоять из участков двустороннего экстремума, где вариации y произвольны, и участков краевого экстремума. Форма таких участков определяется условиями (1.10) и (2.2), а условия их экстремальности имеют вид неравенств. Уравнение участка двустороннего экстремума получим, приравнявая нулю коэффициент перед δy , что с учетом выражения для $W^{(1)}$ дает

$$(\omega h) (\lambda - y^{v+1}) D - h_\tau \mu [(1-M^2)(\omega + \omega^{(1)}) + (v+1)\rho\omega^2\omega^{(2)}] = 0 \quad 5.1$$

В общем случае участок (5.1) будет внутренним участком контура ab . Действительно, в точке b в силу (4.3) и (4.5) имеем $W_b^{(1)} \sim (\omega h)_b$. Если $y(x) \neq 1$, то при любых условиях в a и любом контуре ab состояние газа на выходе из сопла не будет равновесным, и, следовательно, $\omega_b \neq 0$. При $n = 1$ отсюда сразу получаем, что $W_b^{(1)} \neq 0$, т. е. участок двустороннего экстремума не может заканчиваться в точке b .

Это будет и при большем числе неравновесных параметров, так как при неравновесном состоянии возможность равенства $(\omega h) = 0$ (если оно и допускается законами неравновесной термодинамики) крайне маловероятна. Участок (5.1) не может быть и начальным участком контура. В противном случае равенство (5.1), записанное в a , где $y = 1$ и параметры течения известны, давало бы дополнительное условие на λ_a и μ_a . Это условие, однако, в общем случае не может быть удовлетворено, так как произволы, вытекающие из порядка дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2), уже использованы для удовлетворения (4.3).

Исключение составляет особый случай, когда $p_\infty = p_a$ и в сечении a имеет место термодинамическое равновесие. При таких условиях оптимальный контур состоит из отрезка ab , где $y(x) \equiv 1$ при $0 \leq x \leq 1$, и торца. На ab имеем $\omega = \mu = \lambda = 0$, а следовательно, и $W^{(1)} = 0$. В то же время ab является участком краевого экстремума, так как здесь допустимы лишь вариации, при которых $\delta y' > 0$. Данный случай является исключительным еще и по тому, что здесь имеется бесчисленное число контуров с тем же значением χ . Таковыми, в частности, будут контуры, образованные прямолинейными отрезками $y = 1$ при $0 \leq x \leq x_b$, $1 \leq y \leq Y$ при $x = x_b$ и $y = Y$ при $x_b \leq x \leq 1$ для любого $x_b \leq 1$.

Таким образом, начальный участок ac и концевой db должны быть участками краевого экстремума. Как следует из (1.10) и (2.2), все эти участки делятся на два типа: $y' = 0$ и $y' = k$. Первые не вносят вклад в тягу сопла и с этой точки зрения бесполезны. Однако если участок $y' = 0$ не концевой, то его наличие может влиять на χ за счет изменения параметров течения перед последующим расширением. Правда, если такой участок начальный, и в a имеет место термодинамическое равновесие, то он бесполезен и в этом смысле. Поэтому подробно исследуем лишь случай, когда контур оптимального сопла (фиг. 2) состоит из двух участков краевого экстремума ac и db , где $y' = k$, участка двустороннего экстремума cd и торца bg . Контур, содержащий участки $y' = 0$, исследуется аналогичным образом.

Так как на cd величина $W^{(1)} = 0$, то вместо (4.4) имеем

$$\delta\chi = \delta\Sigma = \int_{x_a}^{x_c} W^{(1)} \delta y dx + \int_{x_d}^{x_b} W^{(1)} \delta y dx + (p_b - p_\infty) y_b^* \delta y_b + (p_b - p_\infty) y_b^* y_b' \Delta x_b$$

При любом допустимом варьировании оптимального сопла $\delta\chi \leq 0$, т. е. величина χ может лишь уменьшаться или оставаться постоянной. Исходя из этого, найдем условия, определяющие вместе с (5.1) оптимальное сопло.

Для определения оптимальной длины нужно приравнять нулю множитель перед Δx_b . Однако если $x_b = 1$, то допустимые $\Delta x_b \leq 0$, и для обеспечения максимума χ достаточно, чтобы этот множитель был неотрицательным. Итак,

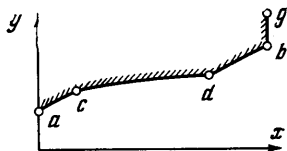
$$(p_b - p_\infty) y_b^* y_b' \geq 0 \quad (5.2)$$

Фиг. 2

где неравенство может иметь место лишь при $x_b = 1$. В этом случае (5.2) есть условие того, что торец bg — участок краевого экстремума. Так как $y_b' = k$, то из (5.2) следует, что для оптимального контура $p_b \geq p_\infty$.

Можно показать, что при $y_b = y_g = Y$ коэффициент перед Δx_b есть $p_b Y^* k > 0$. Следовательно, при $y_b = Y$ длина оптимального сопла равна максимально допустимой.

Так как на db допустимые $\delta y' \leq 0$, то вариации y и y_b не являются произвольными и независимыми. Проварьируем y' лишь на отрезке $x_d \leq x_m \leq x \leq x_n \leq x_b$, и пусть $\max |\delta y'|$ и $|x_n - x_m|$ — величины одного



порядка. Имеем $\delta y = 0$ при $x_d \leq x \leq x_m$ и

$$\delta y = \int_{x_m}^x \delta y' dx \quad (x_m \leq x \leq x_b)$$

Отсюда с точностью до малых более высокого порядка

$$\delta \chi = \delta \Sigma = \left(\int_{x_m}^{x_n} \delta y' dx \right) \left[\int_{x_m}^{x_b} W^{(1)} dx + (p_b - p_\infty) y_b \right] \quad (x_d \leq x_m \leq x_b)$$

При допустимом варьировании множитель перед квадратной скобкой отрицателен. Поэтому условие того, что db — участок краевого экстремума, будет

$$\int_x^{x_b} W^{(1)} dx + (p_b - p_\infty) y_b \geq 0 \quad (x_d \leq x \leq x_b) \quad (5.3)$$

Соответствующее условие для участка ac выводится аналогичным образом и имеет вид

$$\int_x^{x_c} W^{(1)} dx \geq 0 \quad (x_a \leq x \leq x_c) \quad (5.4)$$

Участок db , кроме того, может быть целиком смещен в любую сторону за счет изменения ординаты точки d . В этом случае $\delta y \equiv \delta y_d$ при $x_d \leq x \leq x_b$. В силу произвольности δy_d получаем условие

$$\int_{x_d}^{x_b} W^{(1)} dx + (p_b - p_\infty) y_b = 0 \quad (5.5)$$

определяющее при заданном p_∞ оптимальную величину y_b , т. е. оптимальный размер торца. Из (5.5) и (5.2) следует, что и при $y_b < Y$ оптимальное $x_b = 1$. Если оптимальное сопло не содержит торца, т. е. $y_b = y_g = Y$, то выполнения (5.5) не требуется.

Условия (5.4) — (5.5) вместе с уравнениями участков краевого экстремума полностью определяют оптимальное сопло. При построении участка cd необходимо проверить выполнение условий (1.10) и (2.2). Значение y' для этого находится путем дифференцирования (5.1) и последующего исключения при помощи (1.6) — (1.9), (4.1) и (4.2) всех производных, кроме y' . Результирующее выражение имеет вид

$$y' = \varphi(y, p, T, q, \lambda, \mu) \quad (5.6)$$

где φ — известная функция своих аргументов.

Определенный интерес представляют течения, при которых $\rho = \rho(p, T)$ и $h = h(p, T)$, т. е. отсутствуют неравновесные параметры q , изменяющиеся в соответствии с (1.5). К данному типу, в частности, относятся равновесные и замороженные течения. Здесь, в соответствии с (4.5), $W^{(1)} \equiv 0$, и (4.4) принимает вид

$$\delta \chi = \delta \Sigma = (p_b - p_\infty) y_b \delta y_b + (p_b - p_\infty) y_b y_b' \Delta x$$

Легко показать, что в указанных случаях p_b определяется только величиной y_b и не зависит от формы контура, т. е. $p_b = P(y_b)$, причем $P(y_b)$ — убывающая функция. Следовательно, если y_b выбрать из условия $P(y_b) = p_\infty$, то любой контур с таким y_b будет оптимальным. Это, однако, возможно лишь при $p_\infty \geq P(1 + k)$. Если же $p_\infty < P(1 + k)$ и $Y > 1 + k$, то оптимальный контур определяется однозначно и состоит из прямолинейного участка ab с $x_b = 1$, $y_b = 1 + k$ и торца. Здесь по x_b и y_b реализуется краевой экстремум.

При $k = \infty$ участки ac и db становятся вертикальными, причем, так как теперь область применимости уравнений не ограничена, то распределение p на них определяется уравнениями (1.1) — (1.4) при фиксированных на каждом участке значениях q . И хотя в этом случае одномерные уравнения не описывают действительное течение, тяга такого сопла будет больше тяги оптимальных сопел при ограниченных k . Эти обстоятельства не были учтены в работе [2], где роль участков краевого экстремума отводится участку наибольшего уменьшения степени диссоциации при одном неравновесном параметре, или участку наибольшего уменьшения энтальпии при $n > 1$. Ясно, что сопла, содержащие такие участки, не оптимальны. Действительно, так как на указанных участках du произвольны, а $W^{(1)} \neq 0$, то, в соответствии с выражением (4.4), справедливым для любого контура, они могут быть улучшены.

6. Остановимся на порядке расчета. Необходимо решить уравнения (1.8) и (1.9) при q и T , заданных на левом конце, и уравнения (4.1) и (4.2) при условиях (4.3) — на правом конце интервала интегрирования. Параметры p , ρ , h и w определяются конечными соотношениями (1.1) — (1.4), а контур состоит из участка ac с уравнением $y = 1 + kx$, участка db , где $y' = k$, торца bg и участка двустороннего экстремума cd , форма которого находится из (5.1) или (5.6). Положение точки c при интегрировании от $x = 0$ или точки d при интегрировании от $x = 1$ определяется условиями

$$W_c^{(1)} = W_d^{(1)} = 0$$

Если в какой-либо точке на cd нарушается условие $0 \leq y' \leq k$ или $y \geq 1$, то из нее выпускается соответствующий участок краевого экстремума. Значение $y_b < Y$ при заданном p_∞ определяется из (5.5). После построения контура требуется проверить (5.3) и (5.4).

В результате расчетов было установлено, что в то время как (1.8) и (1.9) можно интегрировать в любом направлении, (4.1) и (4.2) из-за быстрого накопления ошибок можно интегрировать только от $x = 1$. Ввиду этого после задания всех параметров в a и вычисления необходимых констант интегрирование уравнений следует проводить от выходного сечения, для чего, кроме известных λ_b и μ_b , нужно задать y_b , T_b и q_b . Когда эти величины выбраны, ρ_b , h_b , p_b и w_b определяются из (1.2) — (1.4). Если в некотором сечении при $x > 0$ окажется, что $M = 1$, то для выбранных T_b и q_b дальнейшее интегрирование до $x = 0$ невозможно. Поэтому удобно вести счет до такого x , где $M = M_a$. Припишем параметрам в этом сечении индекс f . Условия, определяющие T_b и q_b , можно записать в виде равенств

$$\Delta_f \equiv x_f = 0, \quad \Delta \equiv F(p_f, T_f, q_f) - F(p_a, T_a, q_a) = 0 \quad (6.1)$$

число которых совпадает с числом неизвестных, задаваемых в сечении b для фиксированного y_b . Значение y_b , как уже указывалось, определяется из (5.5).

В соответствии с (2.2), оптимальный контур строится так, что $1 \leq y(x) \leq 1 + kx$, откуда при $x_f = 0$ имеем $y_f = 1$. Поэтому из (1.2) — (1.4) при выполнении (6.1) следуют равенства $T_f = T_a$, $p_f = p_a$, $q_f = q_a$ и т. п.

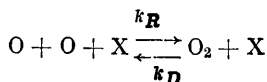
Решение краевой задачи можно получить путем пристрелки с пересчетом T_b и q_b по методу Ньютона. Как показали расчеты, для успеха такого способа решения первоначальные значения T_b и q_b должны быть близки к их точным значениям. Последнее обстоятельство крайне затрудняет построение для отдельного значения p_∞ . В связи с этим лучше проводить расчет целого семейства оптимальных сопел. В качестве начального можно брать сопло с $y_b = 1 + k$. Так как его контур прямолинеен, то T_b и q_b находятся интегрированием (1.8) и (1.9) от $x = 0$. Эти величины используются как исходные для расчета сопла с близким значением $y_b < 1 + k$. Для следующего контура с еще меньшим значением y_b исходные T_b и q_b получаются линейной экстраполяцией по двум предыдущим. Расчеты показали, что квадратичная экстраполяция дает более близкие значения T_b и q_b . Поэтому T_b и q_b для новых контуров определяются квадратичной экстраполяцией по предыдущим. Таким путем строятся оптимальные контуры для всех возможных $p_\infty < p_a$.

Отметим, что для определения χ нет необходимости вычислять интеграл в (2.1), так как, в силу (1.1) и (1.2),

$$(v+1)\chi = I_b - I_a + p_\infty (Y^{v+1} - y_b^{v+1})$$

где $I = y^{v+1} (p + \rho w^2)$ — полный импульс.

7. В качестве примера проводилось построение оптимальных осесимметричных сопел при течении кислорода в случае неравновесной диссоциации. Данное течение характеризуется одним неравновесным параметром, за который возьмем степень диссоциации q — отношение массы атомарного компонента к общей массе. Из различных механизмов рекомбинации рассмотрим лишь механизм тройного столкновения



где O и O_2 — атом и молекула кислорода; X — третья частица, которой может быть и O и O_2 ; k_R и k_D — константы скоростей рекомбинации и диссоциации. Предположим, что как и при равновесии, отношение k_R / k_D равно константе равновесия — известной функции T . Для получения выражений для ρ и h используем модель идеального диссоциирующего газа [4, 5]. В соответствии с ней

$$\rho^0 = p^0 / (1 + q)RT^0, \quad h^0 = [(4 + q)T^0 + T_D^0 q]R$$

$$F = k_{R1} \mu^{-2} \rho^0 l^0 [2q + (1 - q)k_{R2} / k_{R1}] [(1 - q)\rho_D^0 \exp(-T_D^0 / T^0) - \rho^0 q^2]$$

Здесь R — газовая постоянная O_2 , константы T_D^0 и ρ_D^0 имеют размерности температуры и плотности, k_{R1} и k_{R2} — константы скорости рекомбинации при третьей частице O и O_2 соответственно, μ — молекулярный вес O . Согласно [4, 6], $T_D^0 = 59\,000^\circ K$, $\rho_D^0 = 150 \text{ г/см}^3$, $k_{R1} / k_{R2} = 3$, $k_{R1} = 4.8 \cdot 10^{18} \text{ см}^6 \text{ моль}^{-2} \text{ сек град} \cdot (T^0)^{-1}$. При указанном значении k_{R1} / k_{R2} изменение первой квадратной скобки в выражении для F незначительно и почти не оказывает влияния на параметры течения. Поэтому, учитывая направление настоящего исследования, заменим q в этой скобке на константу q_a .

За характерные скорость и плотность возьмем $w^* = (RT_a^0)^{1/2}$ и $\rho^* = p_a^0 / RT_a^0$. При этом $T = T^0 / T_a^0$ и $p = p^0 / p_a^0$. Приведем к безразмерному виду, получим

$$\rho = p / (1 + q)T, \quad h = (4 + q)T + T_D q$$

$$F = \Lambda \rho T^{-1} [(1 - q)\rho_D \exp(-T_D / T) - \rho q^2]$$

Значения безразмерных констант T_D , ρ_D и Λ , как и констант из (1.2) и (1.3), определяются выбором параметров в начальном сечении. В расчетах, результаты которых приводятся ниже, полагалось, что в сечении a имеет место термодинамическое равновесие, т. е. $q_a = q(T_a, p_a)$, в соответствии с $F(p_a, T_a, q_a) = 0$. Значения размерных определяющих параметров возьмем следующими: $T_a^0 = 5000^\circ K$, $p_a^0 = 1 \text{ атм}$, $l^0 = 100 \text{ см}$ и $y_a^0 = 2 \text{ см}$. Это дает $T_D = 11.80$, $\rho_D = 2.6376 \cdot 10^6$, $q_a = 0.96748$, $\rho_a = 0.50827$ и $\Lambda = 38.928$. Для определения течения в начальном сечении необходимо задать число Маха M_a или скорость w_a . Было положено $M_a = 1.10$, чему соответствует $w_a = 1.9854$.

Определение константы k , дающей верхнюю границу применимости одномерных уравнений, выходит за рамки данной работы. Было положено $k = 13.325$, что при $l^0 / y_a^0 = 50$ соответствует максимально допустимому полугуглу раскрытия сопла $\theta_m \approx 15^\circ$. Однако так как y_a^0 и θ_m используются только при вычислении k , то полученные результаты справедливы при любых y_a^0 и θ_m , удовлетворяющих равенству $(l^0 / y_a^0) \tan \theta_m = 13.325$.

Было рассчитано семейство оптимальных контуров для $2.0 \leq y_b \leq 14.325$ при интервале по y_b , равном 0.25 для $y_b > 4.5$ и 0.125 — для $y_b < 4.5$. Для численного интегрирования (1.8) и (1.9) применялся метод, развитый в [7, 8]. Шаг интегрирования при $x < x_d$ брался более мелким, чем при $x > x_d$. Еще мельче он был на той части сопла, где $M^2 < 2.0$. Размер шагов был взят таким, что все значащие цифры в результатах, приводимых ниже, правильные.

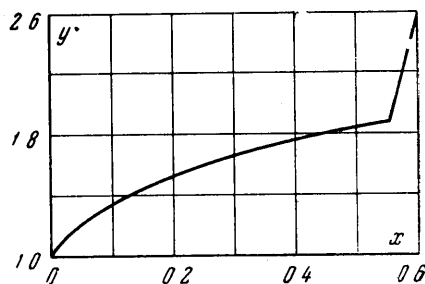
y_b	$x_c \cdot 10^2$	x_d	z_d	y'_d	$p_b \cdot 10_2$	$p_{\infty} 10_2$	$2x_{ab}$	$2x_{1ab}$	$2x_{2vb}$
2.000	0.01	0.988	1.834	0.527	8.536	8.498	0.7545	0.752	0.744
3.000	0.03	0.926	2.042	0.546	2.148	2.075	0.9633	0.931	0.868
4.000	0.04	0.851	2.020	0.566	0.807	0.726	1.0482	0.980	0.882
5.000	0.04	0.775	2.000	0.598	0.380	0.300	1.0916	0.992	0.887
6.000	0.05	0.697	1.968	0.641	0.205	0.127	1.1135	0.989	0.891
7.000	0.06	0.619	1.929	0.696	0.122	0.041	1.1236	0.981	0.894
7.854	0.07	0.552	1.890	0.753	0.082	0.000	1.1260	0.972	0.896
8.000	0.07	0.541	1.883	0.765	0.077	-0.005	1.1260	0.971	0.897
9.000	0.08	0.462	1.831	0.854	0.051	-0.037	1.1219	0.960	0.900
10.00	0.10	0.382	1.770	0.975	0.035	-0.061	1.1127	0.949	0.902
11.00	0.12	0.302	1.697	1.148	0.025	-0.086	1.0963	0.940	0.905
12.00	0.15	0.220	1.606	1.424	0.018	-0.120	1.0737	0.931	0.907
13.00	0.21	0.136	1.483	1.956	0.013	-0.183	1.0367	0.922	0.908
14.00	0.40	0.044	1.265	3.763	0.010	-0.409	0.9652	0.913	0.910

Некоторые характеристики построенных сопел приведены в таблице. Для каждого сопла, кроме геометрических параметров, дано давление на срезе, давление p_∞ , для которого при $Y > y_b$ это сопло оптимально, и сила $2\chi_{ab} = I_b - I_a$, действующая на контур ab . Для тех же y_b приведены силы $2\chi_{1ab}$ и $2\chi_{2ab}$, действующие на контуры конических сопел и параболических сопел, форма которых определяется уравнением

$$y = 1 + (\sqrt{1 + 4\alpha kx} - 1) / 2\alpha$$

$$(\alpha = (1 + k - y_b)(1 - y_b)^{-2} \geq 0)$$

Контуры этих сопел выпуклы, причем y' уменьшается от k при $x=0$ до $k(1+4\alpha k)^{-1/2}$ при $x=1$. Как следует из таблицы, сопла с $y_b \geq 7.854$ не реализуются ни при каких возможных p_∞ . Протяженность начального участка краевого экстремума во всех случаях очень мала и уменьшается с ростом p_∞ . То же самое происходит и с концевым участком краевого экстремума. В то же время в широком диапазоне p_∞ изменение y_d крайне незначительно. В соответствии с этим $y'd$ с ростом p_∞ уменьшается.



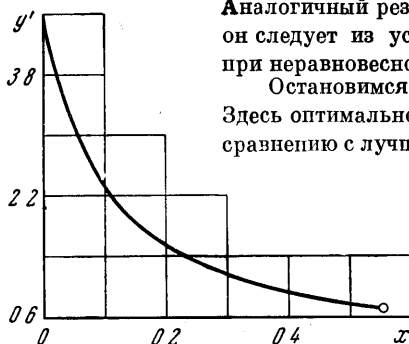
Фиг. 3

Давление на срезе оптимального сопла всегда выше, чем p_∞ . Аналогичный результат имеет место и при точном решении, где он следует из условия Буземана [9, 10], которое сохраняется и при неравновесном течении [1, 11].

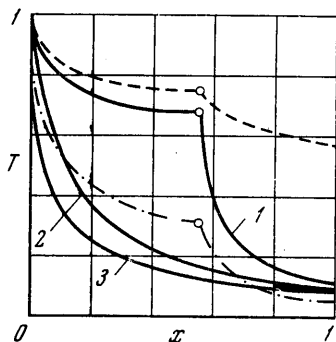
Остановимся подробнее на случае $p_\infty = 0$, когда $\chi = \chi_{ab}$. Здесь оптимальное сопло ($y_b = 7.854$) дает $2\chi_{ab} = 1.126$, что по сравнению с лучшим коническим соплом обеспечивает выигрыш в

13.5%, а с лучшим параболическим — 23%. Выигрыш по полному выходному импульсу I_b примерно в четыре раза меньше, так как $I_b = I_a + 2\chi_{ab}$, а $I_a = 3.0035$. Как указывалось ранее, при равновесном и при замороженном ($q \equiv q_a$) течениях для $p_\infty = 0$ оптимальным будет сопло максимально допустимого расширения, т. е. коническое сопло с $y_b = 1 + k = 14.325$. В этих случаях соответственно имеем $\chi_{eq} = 1.773$ и $\chi_{fr} = 0.730$, где χ_{eq} и χ_{fr} — значения χ при равновесном и замороженном течениях. Это

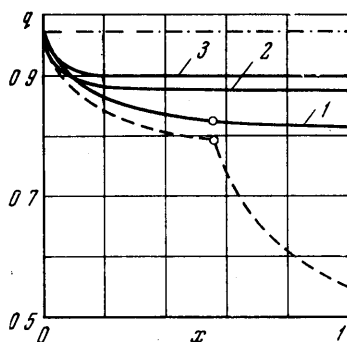
значит, что при оптимальном, коническом и параболическом контурах реализуется соответственно 38, 25 и 20% от разности тяг или импульсов для равновесного и замороженного случаев.



Фиг. 4



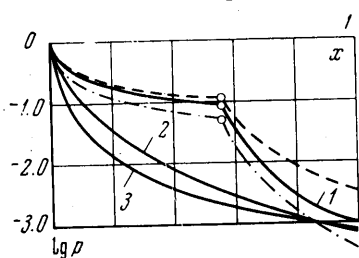
Фиг. 5



Фиг. 6

Форма начального участка оптимального сопла для $p_\infty = 0$ дана на фиг. 3. Участок ac очень мал и поэтому в масштабе этой фигуры не виден. На фиг. 4 дано изменение y' вдоль участка краевого экстремума, а на фиг. 5—7 — распределение I , q и p для опти-

мального, конического и параболического сопел с $y_b = 7.854$ (сплошные линии, отмеченные цифрами 1, 2 и 3 соответственно). Там же штриховыми и штрих-пунктирными линиями нанесены кривые, соответствующие равновесному и замороженному течением в оптимальном сопле. Кружки на кривых соответствуют точке d оптимального контура. Как видно из этих фигур, основная особенность течения в оптимальном сопле состоит в более позднем замораживании состава. Это и обеспечивает его преимущество над другими соплами.



Фиг. 7

l° при любом l° , т. е. вывод об отсутствии оптимума по длине, вероятно, сохраняется. Основной же смысл одномерного рассмотрения в данном случае заключается в оценке возможного выигрыша, который дает оптимальное профилирование сопла.

Поступило 31 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 285—295.
2. Widauskay A., McCue G. A. Optimum nozzles for nonequilibrium expansions. ARS J., 1962, vol. 32, No. 1, p. 86—88.
3. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 178—182.
4. Lighthill M. J. Dynamics of a dissociating gas. Part 1. Fluid Mech., 1957, vol. 2, part 1, p. 1—32 (русс. перев.: сб. «Вопросы ракетной техники», Изд. иностр. лит., 1957, № 5, 6).
5. Freeman N. C. Nonequilibrium flow of an ideal dissociating gas. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, part 4, p. 407—425. (русс. перев.: Механика, сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, № 3).
6. Rink J. P., Knight H. T., Duff R. E. Shock tube determination of dissociation rates of oxygen. J. Chem. Phys., 1961, vol. 34, No. 6, p. 1942—1947 (русс. перев., сб. «Вопросы ракетной техники», Изд. иностр. лит., 1962, № 4).
7. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. ПМТФ, 1963, № 4, стр. 116—118.
8. Галун Н. С., Крайко А. Н. К расчету неравновесных течений. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6, стр. 41—47.
9. Guderley G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwissenschaften, 1955, B. 3, H. 9, 305—315 (русс. перев.: Механика, сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1956, № 4).
10. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
11. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.