

## ДВУМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАЗМЫ В КООКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

К. В. БРУШЛИНСКИЙ, Н. И. ГЕРЛАХ, А. И. МОРОЗОВ

(Москва)

В работе при помощи численного счета исследовано установление и особенности течения идеальной однокомпонентной плазмы в двумерном коаксиальном канале.

Показано, что установление происходит за прелетное время. Обнаружено при определенных условиях появление токовых вихрей. Показано, что ускорение плазмы в коаксиальной системе может сопровождаться ее сжатием.

Настоящая работа посвящена изучению течения плазмы в канале, образованном двумя коаксиальными электродами.

В работе [1] рассмотрен квазидвумерный случай такого течения в плоском канале с медленно меняющимся сечением. Результаты могут быть применены и к коаксиальной системе, но только если зазор между электродами много меньше их радиусов. Для того чтобы полностью осветить особенности, свойственные реальным системам, у которых этот зазор сравним с радиусом центрального электрода или больше его, такого исследования недостаточно. Интересно проследить за влиянием существенно двумерной<sup>1</sup> геометрии системы на течение плазмы. Наибольший интерес представляет здесь влияние спада магнитного поля по радиусу. Действительно, если электрический ток между электродами имеет строго радиальное направление, то напряженность магнитного поля  $H$  ведет себя как  $1/r$ , что приводит к разбросу скоростей на выходе. В действительности, направление токов, вообще говоря, не является радиальным. Ставится задача изучить распределение токов в плазме и разброс скоростей на выходе из канала.

Таким образом, в отличие от [1], в настоящей работе рассматривается двумерная геометрия канала. При этом для упрощения расчетов не учитываются диссипативные эффекты в плазме. В результате работы получен ряд характеристик двумерного течения плазмы, стационарного или очень медленно меняющегося во времени. Последний тип течения именуется квазистационарным.

**§ 1. Постановка задачи.** Задача о двумерном течении плазмы в коаксиальных системах решалась посредством численного счета в системах с различной геометрией электродов. При этом делались следующие предположения.

1. Система аксиально симметрична, т. е. в цилиндрических координатах векторы скорости  $v$  и напряженности магнитного поля  $H$  имеют вид

$$v = (v_r, 0, v_z), \quad H = (0, H_\phi, 0)$$

и все входящие в задачу величины не зависят от азимутальной координаты  $\phi$ .

2. Течение плазмы изэнтропично, т. е. давление  $p$  связано с плотностью  $\rho$  уравнением адиабаты

$$p / p_0 = (\rho / \rho_0)^\gamma$$

где  $\gamma = 5/3$ , как в одноатомном газе.

3. На входе в канал поддерживаются постоянные плотность  $\rho_0$  и давление  $p_0$ .

4. Общий ток, протекающий через систему, поддерживается постоянным, а магнитное поле на входе распределено по закону  $H = \text{const} / r$ .

5. Плазма невязкая, нетеплопроводная, джоулев нагрев отсутствует.

6. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с возможным появлением ударных волн, проводимость плазмы считается конечной, но достаточно большой, так что магнитное число Рейнольдса  $R_m \gg 1$ . Это соответствует малой магнитной вязкости в уравнении для поля.

Цель работы — найти стационарные режимы течения плазмы. Однако, учитывая, что система стационарных уравнений магнитной гидродинамики является эллиптической до критического сечения и гиперболической — за ним, непосредственное решение этих уравнений представляет большие трудности. Поэтому расчеты проводились методом установления, начиная с более или менее произвольного начального состояния, лишь бы оно обеспечивало разгон плазмы в нужную сторону. Кроме того, интересно проследить сам процесс установления.

Все входящие в задачу величины — безразмерные. Для этого в качестве единиц измерения длины, времени, плотности, давления, скорости и напряженности магнитного поля выбраны соответственно  $L$  (длина системы),  $t_0$ ,  $\rho_0$ ,  $^{10}/_3 p_0$ ,  $v_0$ ,  $H_0$ , где

$$v_0^2 = ^{10}/_3 p_0 / \rho_0, \quad t_0 = L / v_0, \quad H_0^2 = ^{10}/_3 p_0$$

<sup>1</sup> Зависимостью от третьей координаты  $\phi$  можно пренебречь в силу аксиальной симметрии системы.

Тогда при сделанных предположениях течение плазмы в канале подчинено следующим уравнениям магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu \Delta \mathbf{H} \\ \nu &= \frac{c^2}{4\pi \tau L v_0} = \frac{1}{R_m} \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $\nu$  — магнитная вязкость. Безразмерное уравнение состояния  $p = 0.3\rho$ . Эти уравнения следует рассматривать в области, изображенной на фиг. 1.

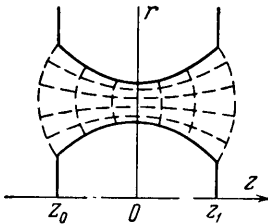
Граничные условия на входе (при  $z = z_0$ ) заданы в виде

$$\rho = 1, \quad H = H_2 a / r \quad (a = \text{const}, \quad H_2 = H_1 / H_0)$$

Здесь  $H_1$  — характерная величина напряженности магнитного поля на входе в канал,  $H_2$  — единственный безразмерный параметр, который, наряду с геометрией системы, характеризует каждый вариант задачи ( $H_2^2$  есть отношение магнитного давления к гидродинамическому на входе в канал).

На боковых поверхностях канала задано естественное граничное условие  $v_n = 0$  ( $v_n$  — нормальная компонента скорости).

Кроме того, система уравнений с магнитной вязкостью требует еще одного условия для  $H$  на выходе (при  $z = z_1$ ) и на боковых границах. Подробный анализ граничного условия на выходе и его влияние на решение в квазидвумерном варианте той же задачи, проделанный в работе [1], позволяет сделать вывод, что на выходе можно поставить условие  $\partial H f / \partial z = 0$ , где  $f$  — площадь сечения канала. На боковых границах полагаем  $\partial H / \partial n = 0$ , где



Фиг. 1

$n$  — направление нормали к границе.

За начальные условия, при  $t = 0$  принимаем  $\rho = 1, \mathbf{v} = 0$ . Функция  $H$  монотонно убывающая вдоль оси  $z$  от  $H_2 a / r$  при  $z = z_0$  до нуля при некотором  $z'$ , и  $H = 0$  при  $z > z'$ .

§ 2. Схема расчетов. 1. Чтобы обойти вычислительные трудности, связанные с криволинейными границами области, ограничиваемся случаем, когда эти границы — гиперболы из некоторого определенного семейства. А именно, переходим к гиперболическим координатам<sup>1</sup>  $\xi, \eta$

$$r = a + b^{-1} |\xi| \eta, \quad z = b^{-1} \sqrt{(b^2 - \eta^2)(\xi^2 - b^2)} \operatorname{sign} \xi$$

в которых координатная сетка состоит из гипербол  $\eta = \text{const}$  и ортогональных к ним эллипсов  $\xi = \text{const}$  (изображены пунктиром на фиг. 1), и требуем, чтобы электроды были координатными линиями  $\eta = \eta_0, \eta = \eta_1$ .

Что касается границ на входе и на выходе, то задаем их для удобства в виде не отрезков прямых  $z = \text{const}$ , а дуг эллипсов  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \xi_1$ .

В этом случае расчетная область превращается в прямоугольник, параллельный осям  $\xi, \eta$ . Он только разорван линиями  $\xi = -b$  и  $\xi = b$ , которые по смыслу задачи (ибо все величины непрерывны при  $z = 0$ ) следует отождествлять. Область изменения  $\xi$  и  $\eta$  такова:

$$\xi_0 \leq \xi \leq -b, \quad b \leq \xi \leq \xi_1, \quad \eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$$

Варьируя  $a, b, \xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1$ , можно менять форму канала в достаточно широких пределах. Уравнения 1.1 в гиперболических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda \mu \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \mu \nu \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left[ \frac{\lambda \mu}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{r \mu}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{r \nu}{\lambda} \right) \right] \right] &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda \mu \frac{\partial H}{\partial \xi} + \mu \nu \frac{\partial H}{\partial \eta} + H \lambda \mu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right] &= \\ &= \nu \left\{ \frac{\lambda \mu}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{r \lambda}{\mu} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{r \mu}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{H}{r^2} \right\} \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mu \nu \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta \mu}{\xi^2 - \eta^2} uv - \frac{\xi \lambda}{\xi^2 - \eta^2} v^2 \right) + \\ &+ \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \lambda \frac{H^2}{4\pi} \frac{\eta \operatorname{sign} \xi}{br} = 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> По предложению О. В. Локуциевского и В. И. Брызгалова.

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \mu v \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\eta \mu}{\xi^2 - \eta^2} u^2 + \frac{\xi \lambda}{\xi^2 - \eta^2} uv \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \mu \frac{H^2}{4\pi} \frac{|\xi|}{br} = 0$$

где  $u = v_\xi, v = v_\eta$  — проекции скорости  $\mathbf{v}$  на направления координатных линий в каждой точке,

$$\lambda = \left( \frac{\xi^2 - b^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2}, \quad \mu = \left( \frac{b^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2}$$

$$r = a + \frac{|\xi|}{b}$$

Граничные условия приобретают вид

$$\rho = 1, \quad H = H_2 \frac{a}{r} \quad \text{при } \xi = \xi_0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (Hf) = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_1$$

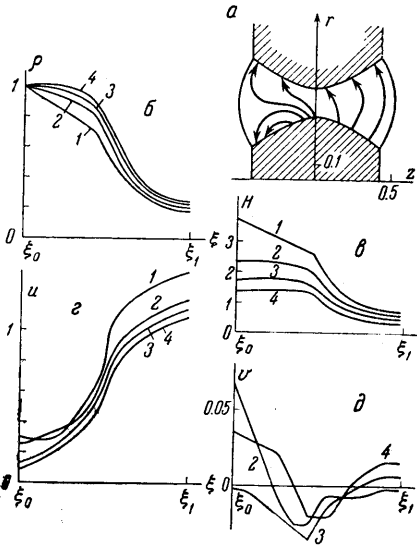
$$v = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_0 \text{ и } \eta = \eta_1$$

Здесь  $f$  — площадь сечения канала.

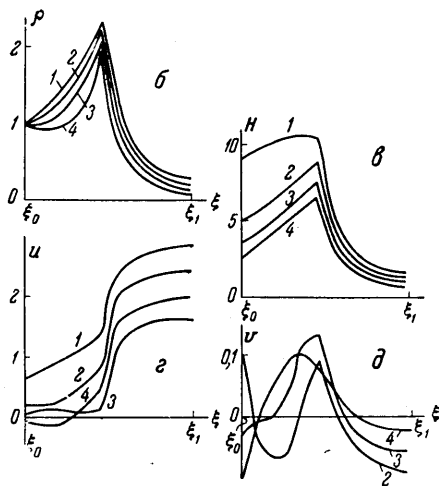
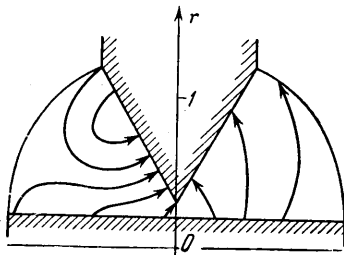
2. Вычисления проводились по локальной однослойной разностной схеме первого порядка точности при сравнительно небольшом числе расчетных точек в области.

Допущенная точность гарантирует сделанные в работе выводы, а преследовать более высокую точность не имеет смысла, так как данная работа ставит своей целью лишь выяснить приблизительную качественную картину процессов, а также пригодность применяемых при этом методов. Такая точка зрения вполне соответствует сильно идеализированным уравнениям 1.1, посредством которых решается поставленная задача.

§ 3. Результаты. Результаты расчетов иллюстрируются двумя вариантами на фиг. 2—3, где изображены: (а) форма канала; стрелками обозначены поля направления электрического тока  $\mathbf{j} = (c / 4\pi) \text{rot } \mathbf{H}$ ; (б), (в), (г), (д) — кривые  $\rho, H, u, v$  как функции от  $\xi$  в момент установления при четырех разных значениях  $\eta$ . На фиг. 2:  $a = 0.5, b = 0.177, -\xi_0 = \xi_1 = 0.530, -\eta = \eta = 0.1, H_2 = 2$ ; цифры у кривых соответствуют: 1)  $\eta = -0.075, 2) \eta = -0.025, 3) \eta = 0.025, 4) \eta = 0.075$ . На фиг. 3  $a = 0.2, b = 0.112, -\xi_0 = \xi_1 = 1.12, \eta_0 = 0, \eta_1 = 0.1, H_2 = 15$ . Цифры соответствуют: 1)  $\eta = 0.0125, 2) \eta = 0.0375, 3) \eta = 0.0625, 4) \eta = 0.0875$ .



Фиг. 2



Фиг. 3 а, б, в, г, д

Эти, а также другие просчитанные варианты позволяют сделать следующие выводы о течении плазмы в канале.

1. Процесс установления происходит за время порядка пролетного времени системы  $\tau_1 \sim L / v_{\max}$ , где  $L$  — длина системы, а  $v_{\max}$  — скорость плазмы на выходе. При этом за  $\tau_1$  принято время, по истечении которого все величины меняются не более чем на 10%.

2. Во всех рассмотренных вариантах не наблюдается крупномасштабных (с длиной волны порядка 0.1 и более) колебаний системы, которые сохранялись бы во времени. Это свидетельствует, что ускорение плазмы происходит устойчиво, по крайней мере относительно указанных колебаний.

3. Зависимость магнитного поля от радиуса приводит к тому, что скорость плазмы на выходе зависит от «номера» линии  $\eta = \text{const}$ , т.е. от радиуса  $r$ . Очевидно, что при возрастании магнитного давления на выходе от нуля до  $H_2 \gg 1$  изменяется не только величина скорости, но и характер ее зависимости от  $r$ . Для выяснения этой зависимости были рассчитаны течения в одной и той же геометрии при разных  $H_2$ . При этом оказалось, что при  $H_2 > 5$ , т.е.  $\beta = 8\pi p_0 / H_1^2 < 1/3$  картина распределения скоростей на выходе практически уже не меняется.

Заметим здесь же, что зависимость выходных скоростей от  $r$  оказалась, вообще говоря, более слабой чем  $1/r$ , т.е. чем зависимость  $H(r)$  на входе.

4. В обычных газодинамических соплах происходит за счет падения давления вдоль сопла, и поэтому (в адиабатическом течении) плотность газа непрерывно падает. В рассматриваемом нами случае, как видно из уравнения Эйлера,

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{(\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{H}}{4\pi}$$

на плазму, наряду с перепадом обычного и магнитного давлений, действует сила  $(\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{H} / 4\pi$ , соответствующая стремлению силовой линии сжаться. Поэтому плотность плазмы не всегда монотонно падает вдоль оси  $z$  (или  $\xi$ ), что наблюдается в вариантах с сильным магнитным полем и искривленной геометрией (см. фиг. 3).

5. Весьма любопытным оказалось наличие вихрей электрического тока  $\mathbf{j}$  в ряде вариантов (линии тока  $\mathbf{j}$  обозначены стрелками на фиг. 2—3). Эти вихри находятся в дозвуковой части канала вблизи электродов, т.е. на части электродов наблюдается обратное направление тока. В связи с этим распределение токов на электродах оказывается сильно неравномерным.

Из рассчитанных вариантов следует, что вихри тока возникают лишь при сильно искривленных геометриях канала и при слабых магнитных полях. При возрастании  $H_2$  в вариантах с неизменными остальными параметрами вихри уменьшаются и в конце концов вообще исчезают. На фиг. 4 изображены линии тока для той же геометрии, что на фиг. 2, но при  $H_2 = 10$ .

Вихри, т.е. наличие в плазме токов с отрицательной  $\eta$ -компонентой, приводят к появлению силы, направленной против потока.

6. В ряде вариантов была предпринята попытка улучшить распределение  $v(r)$  на выходе при помощи неравномерной подачи плотности  $\rho$  на входе в канал. Рассматривались случаи плотности, линейно возрастающей и линейно убывающей с ростом  $r$ . В результате скорость на выходе оказалась более равномерной, однако за счет того, что в части канала скорость плазмы направлена вертикально или вообще в обратную сторону.

Здесь же следует отметить, что в случае линейно убывающей по  $r$  плотности на входе процесс установления течения является точным, т.е. приводит к строго стационарному режиму, в то время как при постоянной плотности на входе получаем квазистационарный, т.е. очень медленно меняющийся во времени режим.

В заключение авторы благодарят О. В. Локуциевского за неоднократные обсуждения этой работы в процессе ее выполнения.

Поступила 9 X 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский К. В., Зуева Н. М., Морозов А. И., Установление квазиодномерного течения плазмы в профилированном канале. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.