

Считая, что при $W_2 \ll 1$ наличие излучения не изменяет заметно положения ударной волны на большом расстоянии от носка тела, и применяя уравнения сохранения массы и импульса [5], получим, что разность между сопротивлением тонкого затупленного тела длины x с учетом и без учета излучения газа в области критической точки можно выразить в виде

$$X_u - X = 2\pi \int_{Y(x)}^{Y(x)+\Delta y(x)} \rho_r u_r (u - u_r) y(x) dy \quad (9)$$

Здесь $Y(x)$ — уравнение тела, u — скорость без учета излучения, индекс r относится к величинам в «радиационном энтропийном слое». Из соотношений (9) и (8) видно, что $X_u - X > 0$, что совпадает с результатами точного решения, полученного в работе [6] для любого значения W_2 .

Поступило 5 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромишевский Е. А. Расчет течения вблизи критической точки затупленного тела с учетом излучения. Инж. ж., 1965, т. 5, № 3.
2. Жигулев В. Н. Об эффекте релаксационного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6.
3. Гладков А. А. Об эффекте релаксационного энтропийного слоя. ПМТФ, 1964, № 1.
4. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
5. Никольский А. А. О силовом действии гиперзвукового потока на тонкие тела в условиях излучения газа в окрестности затупления. Инж. ж., 1961, т. 1, № 3.
6. Ромишевский Е. А. Обтекание тонких тел гиперзвуковым потоком газа с учетом излучения. Инж. ж., 1963, т. 3, № 1.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА СФЕРЕ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ РАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ВОЗДУХА

И. Н. МУРЗИНОВ (Москва)

В работе коротко изложен метод и приведены результаты численных расчетов ламинарного пограничного слоя на сфере, движущейся с гиперзвуковой скоростью. Предполагается, что воздух в пограничном слое находится в равновесно диссоциированном состоянии, но число Прандтля в большинстве расчетов полагается постоянным. Предположение о постоянстве числа Прандтля, как показали отдельные расчеты, практически не отражается на распределении тепловых потоков по сфере.

Распределение тепловых потоков по сфере для $M_\infty \geq 10$ и $i_w \ll i_0$ носит универсальный характер. Это позволило результаты расчетов аппроксимировать простой формулой.

1. В обычных предположениях уравнения количества движения, неразрывности и энергии для ламинарного пограничного слоя в условиях равновесно диссоциирующего воздуха можно записать в виде [1]

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{R_\infty} \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{\partial (r^y \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^y \rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma R_\infty} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{R_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & (R_\infty = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_\infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь xR_0 , yR_0 — расстояния вдоль образующей и по нормали к ней; uV_∞ , vV_∞ — составляющие скорости газа по осям x и y соответственно; $\rho\rho_\infty$, $\mu\mu_\infty$, $p\rho_\infty V_\infty^2$, iV_∞^2 — соответственно плотность, вязкость, давление и энтальпия газа; $v = 0$ — для плоского и $v = 1$ — для осесимметричного движений; rR_0 — расстояние от оси симметрии до образующей тела; σ — эффективное число Прандтля, учитывающее перенос тепла посредством диффузии; ρ_∞ , V_∞ , μ_∞ — плотность, скорость и вязкость газа в набегающем потоке, R_0 — характерный размер тела (радиус сферы).

Как обычно в задачах пограничного слоя, давление $p(x)$ считается заданной функцией расстояния вдоль образующей. Вообще говоря, задания $p(x)$ недостаточно для определения на внешней границе пограничного слоя скорости $u_e(x)$ и энтальпии газа $i_e(x)$. Необходимо еще знать энтропию газа на внешней границе пограничного слоя, которая в рассматриваемом случае будет функцией расхода газа через пограничный слой. Однако оценки показывают, что при числах Рейнольдса $R_\infty \geq 10^4$ изменение энтропии вдоль внешней границы пограничного слоя несущественно. Поэтому будем полагать энтропию на внешней границе пограничного слоя на сфере постоянной, равной энтропии газа, прошедшего через прямой скачок уплотнения.

Для гиперзвуковых скоростей движения сферы представляют интерес следующие граничные условия на стенке:

$$u = 0, \quad v = v_w(x), \quad i = i_w(x) \quad \text{при } y = 0 \quad (1.2)$$

В данной работе будем считать

$$v_w \equiv 0, \quad i_w = \text{const}$$

На внешней границе пограничного слоя имеем

$$u = u_e(x), \quad i = i_e(x) \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Величина $i_e(x)$ для изэнтропического течения при заданных распределении давления и уравнении состояния

$$\rho = \rho(i, p) \quad (1.4)$$

находится интегрированием уравнения

$$di = dp / \rho(i, p) \quad (1.5)$$

Скорость $u_e(x)$ [определяется из интеграла Бернулли

$$u_e = \sqrt{2(i_0 - i_w)} \quad (1.6)$$

При этом $i_0 V_\infty^2$ — энтальпия торможения газа.

Для того чтобы замкнуть систему (1.1), необходимо задать уравнение состояния равновесно диссоциирующего воздуха и зависимости вязкости и числа Прандтля от энтальпии и давления.

Имеются подробные таблицы уравнения состояния для равновесно диссоциирующего воздуха [2]. Однако использовать их в таком виде неудобно из-за большого объема.

На основе данных [2] уравнение состояния равновесно диссоциирующего воздуха можно приближенно представить в виде

$$p / \rho i = f_1(i V_\infty^2) + f_2(i V_\infty^2) \lg(p \rho_\infty V_\infty^2) \quad (1.7)$$

где f_1, f_2 — таблично задаваемые функции энтальпии. При объеме каждой из этих таблиц в 30 чисел и использовании линейной интерполяции для вычисления функций в промежуточных точках максимальная погрешность аппроксимации уравнения состояния зависимостью (1.7) не превосходит 2% в диапазоне $0.001 \text{ ат} \lesssim p \rho_\infty V_\infty^2 \lesssim 50 \text{ ат}$ и $i V_\infty^2 \lesssim 35000 \text{ ккал/кг}$.

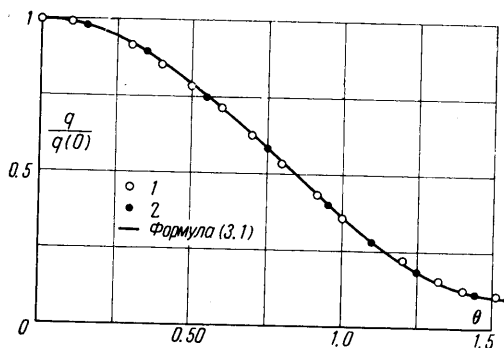
Закон изменения вязкости от давления и энтальпии принимался в соответствии с зависимостью

$$\rho \mu = c p i^{-n} \quad (c = \gamma(\gamma - 1)^{-n} M_\infty^{2(1-n)}) \quad (1.8)$$

Здесь $\gamma = 1.4$ — показатель адиабаты, M_∞ — число Маха в набегающем потоке.

В расчетах, на основе аппроксимации данных работы [3] для равновесно диссоциирующего газа, полагалась $n = 0.315$. Отметим, что данные работы [4] хорошо аппроксимируются зависимостью вида (1.8) при $n = 0.365$.

Эффективное число Прандтля, позволяющее записать уравнения пограничного слоя для равновесно диссоциирующего воздуха в обычном виде (1.1), рассчитано, например, в работе [4]. Эффективное число Прандтля является сложной функцией давления и энтальпии, и использование его сильно увеличивает время расчета. Забегая вперед, отметим, что, как показали отдельные расчеты, распределение теплового



Фиг. 1

потока по сфере при $i_w \ll i_0$ и $V_\infty \lesssim 10000$ м/сек крайне нечувствительно к тому, используется ли постоянное число Прандтля $\sigma = 0.72$, или изменяющееся в соответствии с [4] число Прандтля. Иллюстрацией этому может служить фиг. 1, где показаны результаты сравнительного расчета с изменяющимся (точки 1) и постоянными (точки 2) числами Прандтля при $V_\infty = 10000$ м/сек, $H = 60$ км.

Поскольку цель настоящей работы — получить распределение теплового потока по сфере, то в дальнейших расчетах число Прандтля полагалось постоянным $\sigma = 0.72$.

Распределение давления по сфере в условиях равновесно диссоциирующего воздуха задавалось на основе результатов точных численных расчетов, приведенных в [5]. Данные этих расчетов по давлению при $V_\infty \gtrsim 3000$ м/сек хорошо аппроксимируются зависимостью [5]

$$p/p_0 = 1 - 1.17 \sin^2 \theta + 0.225 \sin^6 \theta \quad (1.9)$$

Здесь p_0 — давление в критической точке, θ — центральный угол между направлениями в критическую и рассматриваемую точки сферы.

2. В настоящее время многие задачи пограничного слоя, не допускающие автомодельных решений, решены точными численными методами. При этом используются либо разностные методы [6, 7], либо предложенный А. А. Дородницким метод обобщенных интегральных соотношений [8, 9]. С небольшими изменениями в настоящей работе использовалась разностная схема работы [6].

Если ввести переменную Дородницкина

$$\eta = \sqrt{\frac{R_\infty}{C}} \int_0^y \rho dy \quad (2.1)$$

то система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho i^{-n} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial (r^v u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^v v_1)}{\partial \eta} &= 0 \\ u \frac{\partial i}{\partial x} + v_1 \frac{\partial i}{\partial \eta} &= \frac{u}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho i^{-n} \frac{\partial i}{\partial \eta} \right) + \rho i^{-n} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \\ \left(v_1 = \sqrt{R_\infty} \rho v + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эту систему необходимо решить при граничных условиях

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v_1 = 0, \quad i = i_w = \text{const} \quad \text{при } \eta = 0 \\ u = u_e(x), \quad i = i_e(x) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.2) решалась разностным методом с использованием неявной шеститочечной схемы [6].

Уравнения в частных производных (2.2) заменялись конечно-разностными уравнениями на основе формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{f_{m+1}^{n+1} - f_{m-1}^{n+1}}{2\Delta \eta} s + \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2\Delta \eta} (1-s) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} &= \frac{f_{m+1}^{n+1} - 2f_m^{n+1} + f_{m-1}^{n+1}}{\Delta \eta^2} s + \frac{f_{m+1}^n - 2f_m^n + f_{m-1}^n}{\Delta \eta^2} (1-s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$(0.5 \leq s \leq 1)$$

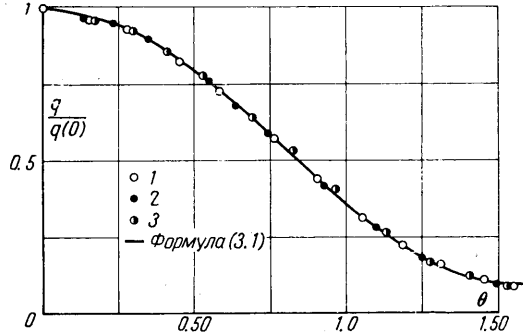
где f — любая из функций, входящих в (2.2), $x = n\Delta x$, $\eta = m\Delta \eta$. Коэффициенты в уравнениях (2.2) расписывались на среднюю между слоями точку ($x = (n + 1/2)\Delta x$, $\eta = m\Delta \eta$). В этом случае уравнения в конечных разностях аппроксимируют исходную систему с погрешностью $o(\Delta x^2) + o(\Delta \eta)^2$ при $s = 0.5$ и $o(\Delta x) + o(\Delta \eta^2)$ при $s = 1$.

В каждое из уравнений системы (2.2) неизвестные функции входят таким образом, что делают ее взаимосвязанной и нелинейной. Вследствие этого задача решалась методом итераций, когда функции, связывающие данное уравнение с другими и делающие его нелинейным, брались из предыдущей итерации. Это позволило каждое уравнение решать отдельно от других.

Для первого и третьего уравнений системы необходимо было решать краевую задачу, поэтому расчет проводился методом прогонки. Счет велся послойно. При переходе от одного слоя к другому в качестве первого приближения брались значения функций на предыдущем слое.

Проведенные расчеты показали, что используемая схема расчета устойчива при произвольном соотношении шагов и процесс итерации хорошо сходится.

Для решения системы разностных уравнений необходимы начальные данные в некотором сечении $x = x_0$. Из физического смысла задачи такие данные неизвестны ни для какого сечения. Однако хорошо известно также, что система уравнений (2.2) в окрестности точки торможения допускает автомодельное решение, которое может быть использовано в качестве начальных данных. Практически же факт существования автомодельного решения в окрестности точки торможения удобнее использовать для получения начальных данных в единообразном процессе расчета методом установления. Если при $x_0 = 0$, где $u(\eta) \equiv 0$, задать приближенные значения профилей $i_0(\eta)$, $v_{10}(\eta)$, то при достаточно малом шаге Δx в силу автомодельного характера решения в окрестности точки торможения через несколько шагов получим решение, практически не зависящее от $i_0(\eta)$, $v_{10}(\eta)$. При этом, как показали расчеты, профиль энтальпии можно задавать в виде ломаной



Фиг. 2

$i_0(\eta) = i_w + \eta i'(0)$, $\eta \leq \frac{i_e - i_w}{i'(0)}$, $i_0(\eta) = i_e$, $\eta > \frac{i_e - i_w}{i'(0)}$ (2.5)

Здесь i_e — значение энтальпии на внешней границе пограничного слоя при $x_0 = 0$, а значение $i'(0)$, определяющее теплообмен, задается приближенно, например на основе расчета Фая и Ридделла.

Профиль нормальной составляющей скорости $v_{10}(\eta)$ можно задавать из решения о течении в окрестности точки торможения несжимаемой вязкой жидкости, которое удобно аппроксимировать зависимостью

$$v_{10}(\eta) = a\eta^2 \quad (\eta \leq \eta_1),$$

$$v_{10}(\eta) = b(\eta - \beta) \quad (\eta > \eta_1) \quad (2.6)$$

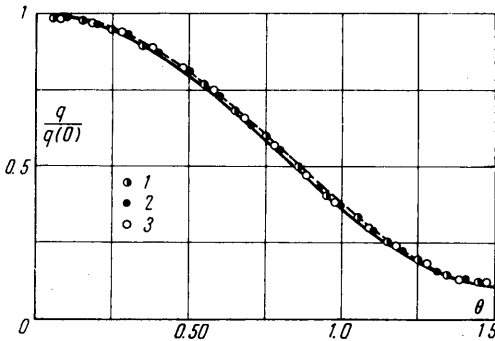
Здесь a, b, η_1, β — соответствующим образом подобранные константы.

Так, например, при $\Delta x = 0.01$ и начальных профилях, задаваемых формулами (2.5), (2.6), через 10 шагов (при $x = 0.1$) решение отличалось менее чем на 0.1% от решения, когда в качестве начальных профилей использовались $i_0(\eta)$, $v_{10}(\eta)$, полученные из автомодельного решения.

Внешняя граница пограничного слоя определялась из условия гладкого сопряжения с невязким потоком.

3. Из системы (2.2) и граничных условий (2.3) видно, что для постоянного числа Прандтля в случае совершенного газа определяющими задачу параметрами будут n, σ, i_w, γ , форма тела $r = r_w(x)$ и распределение давления $p(x)$. Поскольку для больших скоростей движения справедлив закон гиперзвуковой стабилизации, согласно которому при больших числах Маха набегающего потока величина $p(x)$ не зависит от числа Маха, то отсюда следует, что для данного газа и заданной формы тела течение в пограничном слое в переменных x, η будет определяться единственным параметром i_w . Поэтому при $i_w \ll 1$ принцип гиперзвуковой стабилизации будет распространяться и на течение в пограничном слое.

Для условий равновесно-диссоциирующего воздуха из анализа уравнений сделать аналогичного вывода нельзя. Однако в диапазоне чисел Маха $10 \leq M_\infty \leq 40$ рас-



Фиг. 3

пределение давления практически на зависит от M_∞ [5], и, как показали проведенные расчеты, распределение тепловых потоков по сфере также подчиняется закону гиперзвуковой стабилизации.

На фиг. 2 показано распределение тепловых потоков по сфере для нескольких значений i_w ($V_\infty = 7500$ м/сек, точки 1 — $i_w = 0.01$, 2 — $i_w = 0.05$, 3 — $i_w = 0.1$). Видно, что распределение тепловых потоков крайне нечувствительно к значению энтальпии стенки.

Распределение тепловых потоков по сфере для различных значений скорости полета показано на фиг. 3 (точки 1 — $V_\infty = 4000$ м/сек, 2 — 6000 м/сек, 3 — 7500 м/сек). Эти данные показывают, что распределение тепловых потоков по существу не зависит от скорости движения. На той же фиг. 3 показана кривая (сплошная линия)

$$q / q(0) = 0.55 + 0.45 \cos \theta \quad (3.1)$$

посредством которой можно с хорошей точностью аппроксимировать результаты расчетов.

Проведенные расчеты показали также, что высота полета при одной и той же скорости движения не влияет на распределение тепловых потоков.

При расчетах ламинарного теплообмена на тупых телах часто используют предложенный Лизом [10] метод локального подобия. Для распределения теплового потока по тупому телу на основе метода локального подобия можно записать [11]

$$\frac{q}{q(0)} = \frac{r \rho_w u_w u_e}{\sqrt{2\xi}} \left[2 \rho_w u_w \frac{du_e}{dx} \right]_0^{-1/2} \frac{1 + 0.096 \sqrt{\beta}}{1.068}$$

$$\xi = \int_0^x \rho_w u_w u_e r^2 dx, \quad \beta = 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi}$$

Здесь индекс 0 относится к параметрам в критической точке.

Распределение теплового потока, посчитанное по этой формуле при использовании распределения давления (1.9) для совершенного газа с $\gamma = 1.2$, показано на фиг. 3 пунктиром. Метод локального подобия дает результаты, хорошо согласующиеся с данными численных расчетов. Заметим, что распределение теплового потока, посчитанное по методу локального подобия при одном и том же распределении давления, очень слабо зависит от показателя адиабаты γ .

Поступило 8 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
2. П р е д в о д и т е л е в А. С. (ред.). Сб. «Таблицы термодинамических функций воздуха». Изд-во АН СССР, 1957.
3. П р е д в о д и т е л е в А. С. (ред.). Физическая газодинамика. Сб. статей. Изд-во АН СССР, 1960.
4. H a n s e n C. F. Approximations for Thermodynamic and Transport Properties of High-Temperature Air. NASA Technical Report R-50, 1959.
5. Л у н ё в В. В., П а в л о в В. Г., С и н ч е н к о С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равномерно диссоциирующим воздухом. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, № 1.
6. Б р а и л о в с к а я И. Ю., Ч у д о в Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. статей ВЦ МГУ «Вычислительные методы и программирование», Изд-во МГУ, 1962, вып. 1.
7. П е т у х о в И. В. О численном интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 2.
8. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. ПМТФ, 1960, № 3.
9. П а в л о в с к и й Ю. Н. Численный расчет пограничного слоя в сжимаемом газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5.
10. L e e s L. Laminar Heat Transfer over Blunt — Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds Jet Propulsion, 1956, No 4.
11. К е м п Н. Х., Р о у з П. Х., Д е т р а Р. В. Ламинарный теплообмен тупых тел с потоком диссоциированного воздуха. Сб. статей «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». Изд. иностр. лит., 1962.