

ОБ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ

А. М. ЧИБИСОВ (Москва)

Потенциал скорости φ_1 и функция тока ψ_1 плоского адиабатического сверхзвукового течения газа удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = -\sqrt{K_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \sqrt{K_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}, \quad 2\xi = \sigma - \theta, \quad 2\eta = \sigma + \theta \quad (1)$$

$$\tau(\lambda) = \int_{\lambda}^h \left(\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \lambda^2/h^2} \right)^{1/2} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \sqrt{K_1} = (\lambda^2 - 1)^{1/2} (1 - \lambda^2/h^2)^{-h^2/2} \quad \left(h^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right) \quad (2)$$

Здесь κ — показатель адиабаты, λ и θ — величина и угол наклона вектора относительной скорости. Переход к физической плоскости можно осуществить по формулам:

$$dx = \cos \theta P(\lambda) d\varphi_1 - \sin \theta Q(\lambda) d\psi_1, \quad dy = \sin \theta P(\lambda) d\varphi_1 + \cos \theta Q(\lambda) d\psi_1$$

Отсюда, используя условия полных дифференциалов, имеем [1]

$$\frac{dQ}{d\sigma} + \sqrt{K_1} P = 0, \quad \frac{dP}{d\sigma} \sqrt{K_1} - Q = 0$$

Гиперзвуковое приближение уравнений (1), получаемое заменой функции $\sqrt{K_1}$ на первый член разложения ее в окрестности $\lambda = \lambda_{\max}$ по степеням σ , равный

$$\sqrt{K_2} = (h^2 - 1)^2 \sigma^{-h^2} \quad (3)$$

при целых четных значениях h^2 имеет общее решение, известное из исследований Дарбу. Основные краевые задачи для гиперзвукового приближения уравнений (1) решены в работах [3], [4].

Для газа с показателем адиабаты $\kappa = 1.4$ ($h^2 = 6$) коэффициент Чаплыгина $\sqrt{K_1}$ мало отличается от своей гиперзвуковой части $\sqrt{K_2}$ при $2 < M < \infty$ [4].

Однако заметим, что при значениях $\kappa < 1.4$, т. е. при $h^2 > 6$ область применимости гиперзвукового приближения решения уравнения (1) быстро сужается. Это показано на фиг. 1, где изображены отношения $F = \sqrt{K_1} / \sqrt{K_2}$ в функции от логарифма числа M при различных значениях κ . Кривая, обозначенная цифрой 1, соответствует значениям $\kappa = 1.4$ ($h^2 = 6$), 2 соответствует $\kappa = 1.29$ ($h^2 = 8$), 3 — $\kappa = 1.22$ ($h^2 = 10$), 4 — $\kappa = 1.133$ ($h^2 = 16$), 5 — $\kappa = 1.065$ ($h^2 = 32$). В частности, при $\kappa = 1.22$ значения $\sqrt{K_1}$ и $\sqrt{K_2}$ близки лишь в интервале $8 < M < \infty$.

Попытаемся получить интегрируемые уравнения плоского гиперзвукового течения газа с показателем адиабаты $\kappa < 1.4$ при лучшей аппроксимации коэффициента Чаплыгина, чем $\sqrt{K_2}$.

Записав уравнения (1) и их гиперзвуковое приближение в переменных (σ, θ) , введя переменную

$$\zeta_i = \int_{\sigma}^0 \sqrt{K_i} d\sigma \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

и исключив φ_i , получим

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta_i^2} - K_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

Из (2) и (4) найдем

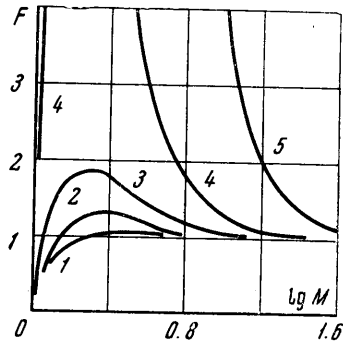
$$\zeta_i = \left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2} \right)^{1/2} \sum_{k=h^2}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2} \right)^k \quad (6)$$

Формулы (2) и (6) определяют $\sqrt{K_1}(\zeta_1)$. Для ζ_2 из формул (3) и (4) получим

$$\zeta_2 = (h^2 - 1)^{(h^2-1)/2} \sigma^{-h^2+1}$$

и, следовательно,

$$K_2(\zeta_2) = (h^2 - 1)(h^2 + 1) \frac{2h^2}{h^2+1} \zeta_2^{-\frac{2h^2}{h^2+1}}$$

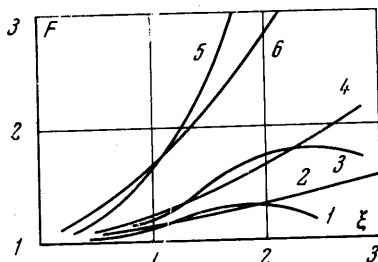


Фиг. 1

От ψ_2 , ζ_2 уравнения (5) перейдем к переменным ψ_3 , ζ_3 по формулам

$$\zeta_3 = f_1(\zeta_2), \quad \psi_3 = \psi_2 f_2(\zeta_2)$$

где функции f_1 и f_2 выбраны так, чтобы новое уравнение являлось уравнением типа Чаплыгина. Это преобразование применял Жермен к трансзвуковым течениям газа [6]. В полученном уравнении ($i = 3$)



Фиг. 2

$$\zeta_3 = \frac{c_1 \zeta_2}{c_1 + \zeta_2}, \quad f_2 = \frac{c_2}{c_1 + \zeta_2}$$

$$K_3(\zeta_3) = K_2(\zeta_2) \left(\frac{c_1 + \zeta_2}{c_1} \right)^4 \quad (7)$$

Здесь c_1 — существенная произвольная постоянная, которую используем для улучшения аппроксимации. Для упрощения вычислений будем сравнивать $\sqrt{K_1} / \sqrt{K_2}$ с $\sqrt{K_3} / \sqrt{K_2}$. На фиг. 2 кривые 1, 3, 5 изображают $\sqrt{K_1} / \sqrt{K_2}$ при h^2 равном 8, 10, 16, соответственно, а кривые 2, 4, 6, изображают $\sqrt{K_3} / \sqrt{K_2}$ при c_1 , равном 13, 9, 5.

Как можно заключить из этих графиков, преобразование (7) позволяет получить лучшее приближение к точному коэффициенту Чаплыгина, чем $\sqrt{K_2}$. Например, при $\kappa = 1.22$ ($h^2 = 10$) $\sqrt{K_1}$ и $\sqrt{K_3}$ близки в интервале $0 < \zeta < 2.3$, что соответствует $2 < M < \infty$. Формулы (7) и (4) позволяют по заданным крайним условиям для уравнения (5) ($i = 3$) поставить соответствующие крайние задачи для уравнения Дарбу, решение которого известно [3, 4]. Затем обратным переходом по тем же формулам определить искомые решения.

Поступило 20 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа. Прикл. матем. и механ., 1947, т. 11, № 2.
2. Ф а л ь к о в и ч С. В. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. Прикл. матем. и механ., 1947, т. 11, № 4.
3. В о р о б ь е в О. С. Приближенное аналитическое представление плоских сверхзвуковых течений газа. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 5.
4. Д е р ж а в и н а А. И., Ч у к а н о в а Т. И. Интегрирование уравнений плоскоизэнтропического движения газа с большими сверхзвуковыми скоростями. Инж. ж., т. 3, № 1, 1963.
5. P. G e r m a i n et M. F e n a i n. Sur une correspondance simple entre les solutions de deux équations aux dérivées partielles, et son application à l'étude approchée des écoulements transsoniques. C. Pr. Acad. Sci. Paris., 1952, 234, 6.

ОБ ЭФФЕКТЕ РАДИАЦИОННОГО ЭНТРОПИЙНОГО СЛОЯ

Е. А. РОМИШЕВСКИЙ (Москва)

В работе [1] рассмотрено гиперзвуковое обтекание затупленного тела в окрестности точки торможения с учетом «объемного высвечивания» воздуха за ударной волной. Было отмечено, что вблизи поверхности тела при этом образуется слой с пониженным, за счет излучения, значением энтропии газа и повышенным значением его плотности. Этот «радиационный энтропийный слой» от критической точки будет простирается вниз вдоль обтекаемой поверхности и будет влиять на конвективную теплопередачу к телу. Далее исследована структура этого слоя.

Рассмотрим уравнение энергии, содержащее в правой части член $E(i, \rho)$ — излучаемую с единицы объема энергию. Проведем оценку членов в этом уравнении отдельно для струйки газа 1, проходящей непосредственно вблизи оси симметрии, и для другой струйки 2, находящейся от нее на некотором расстоянии (см. фигуру). Отношение W характерных членов излучения к конвективным членам в первом и втором случаях соответственно будет

$$W_1 \approx \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} W_2, \quad W_2 \approx \frac{ER}{\rho_{\infty} u_{\infty}^3} \quad \left(\kappa = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

Здесь c_p и c_v — удельные теплоемкости. Из оценок видно, что при гиперзвуковом обтекании затупленного тела может быть реализован случай, когда $W_2 \ll W_1 \sim 1$.