

**О ПРЕДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ИСКУССТВЕННОЙ КАВЕРНЫ,
ОБРАЗУЕМОЙ НА НИЖНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СТЕНКИ**

А. А. БУТУЗОВ (Ленинград)

На отрывное кавитационное течение, искусственно создаваемое путем поддува газа за обтекаемую потоком жидкости преграду (насадок), существенное влияние оказывает весомость жидкости [1]. В статье рассматривается плоское кавитационное течение, создаваемое за насадком, расположенным на нижней поверхности бесконечной горизонтальной стенки.

1. Решается задача о кавитационном обтекании пластинки, образующей малый угол α со стенкой. Жидкость предполагается весомой, идеальной, несжимаемой, движение ее — безвихревым. Считается, что длина каверны L значительно больше длины насадка. Применяется схема Рябушинского.

Обозначения

- | | |
|---|--|
| a — отношение длины пластинки к полудлине каверны, | U_0 — скорость потока на бесконечности, |
| $\eta(x)$ — ордината контура каверны, | σ — число кавитации, |
| f — величина, обратная квадрату числа Фруда по полудлине каверны $1/2L$ | p_0 — давление на бесконечности на уровне горизонтальной стенки, |
| g — ускорение силы тяжести, | p_k — давление в каверне, |
| | ρ — плотность жидкости. |

Ставится задача об отыскании комплексной вызванной скорости течения $w(z) = u(z) - iv(z)$, где u и v — горизонтальная и вертикальная компоненты вызванной скорости, $z = x + iy$. Используются безразмерные величины вызванных скоростей и безразмерные координаты. Вызванные скорости относятся к величине скорости невозмущенного потока на бесконечности, координаты — к полудлине каверны.

Аналитическая функция $w(z)$ должна удовлетворять условию непротекания жидкости через твердые границы и контур каверны и условию постоянства давления на контуре каверны. В силу тонкости насадка, а следовательно и каверны, указанные граничные условия линеаризируются. Граничные условия имеют вид:

$$v(x) = \omega(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \omega(x) = -\alpha \quad (-1 - a < x < -1), \quad \omega(x) = -\eta'(x) \quad (-1 < x < 1) \\ \omega(x) = \alpha \quad (1 < x < 1 + a), \quad \omega(x) = 0 \quad (x < -1 - a, \quad x > 1 + a) \end{aligned} \tag{1.2}$$

При этом, $u(x) = -f\eta(x) - 1/2\sigma \quad (-1 < x < 1)$ (1.3)

где $\eta(x) = \alpha a + \int_{-1}^x v dx, \int_{-1}^1 v dx = 0, f = \frac{gL}{2U_0^2}, \sigma = \frac{p_0 - p_k}{1/2\rho U_0^2}$ (1.4)

Контур каверны должен касаться контуров насадков, поэтому приведенные условия необходимо дополнить требованием

$$\eta'(-1) = -\eta'(1) = \alpha \tag{1.5}$$

Функция $w(z)$ может быть представлена интегральным соотношением

$$w = -\frac{1}{\pi} \int_{-1-a}^{1+a} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\xi - z} \tag{1.6}$$

вытекающим из равенств (1.1), (1.2) и формулы Шварца для полуплоскости. Соотношения (1.2), (1.3), (1.6) приводят к интегро-дифференциальному уравнению относительно функции $\eta(x)$

$$f\eta(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\eta'(\xi) d\xi}{\xi - x} + \frac{\sigma}{2} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{(1+a)^2 - x^2}{1 - x^2} \quad \text{при } -1 < x < 1 \tag{1.7}$$

В точках $x = \pm 1$ функция $\eta(x)$ должна удовлетворять условию (1.5) и условию

$$\eta(\pm 1) = \alpha a \tag{1.8}$$

следующему из равенств (1.4). Интегро-дифференциальное уравнение (1.7) при условиях (1.5), (1.8) эквивалентно краевой задаче (1.1) — (1.5) для аналитической функции $w(z)$. Параметр σ в (1.7), как и в (1.3), является неизвестным.

Интегро-дифференциальное уравнение (1.7) решалось приближенно. С этой целью функция $\eta(x)$ на интервалах $\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$, где точки ξ_m выбраны так, что

$$-1 = \xi_{-n} < \xi_{-(n-1)} < \dots < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = 1, \xi_0 = 0, \xi_{-m} = -\xi_m$$

аппроксимировалась полиномами второй степени. Полиномы удовлетворяли условиям $\eta(\xi^+) = \eta(\xi^-)$, $\eta'(\xi^+) = \eta'(\xi^-)$, условиям (1.5), (1.8) и условию, $\eta(x) = \eta(-x)$, вытекающему из схемы Рябушинского.

Принятая аппроксимация функции приводила к равенствам вида

$$\eta(x) = \eta(1) + \sum_{i=1}^n c_i(x) q_i, \quad \int_{-1}^1 \frac{\eta'(\xi) d\xi}{\xi - x} = \sum_{i=1}^n d_i(x) q_i \quad (0 < x < 1), \quad q_n = -\eta'(1) = \alpha \quad (1.9)$$

Здесь q_i — значения функции $-\eta'(x)$ в точках $x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; функции $c_i(x), d_i(x)$ зависят от выбора точек ξ_m . Уравнение (1.7) выполнялось в точках

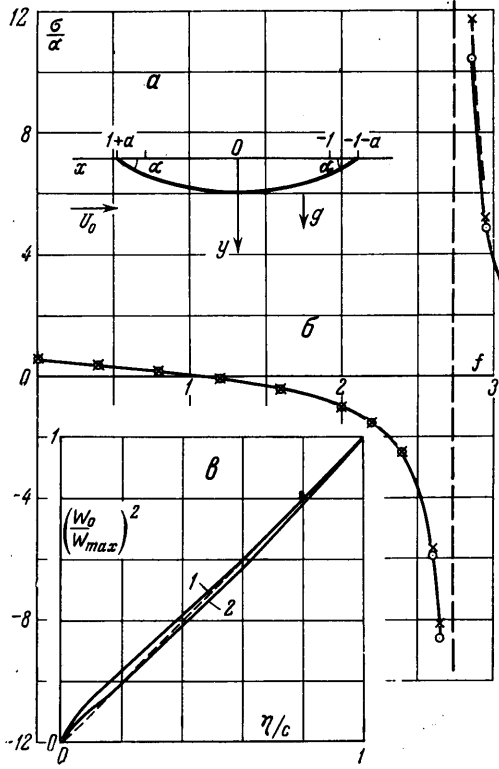
$x = 1/2(\xi_i + \xi_{i+1}), i=0,1,2,\dots,n-1$. Отсюда, в соответствии с равенствами (1.9), составлялась система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\sigma/\alpha, q_1/\alpha, \dots, q_{n-1}/\alpha$$

Система линейных уравнений решалась на электронной счетной машине М-20. С целью проверки сходимости приближенных решений интегро-дифференциального уравнения рассматривались случаи $n=10$ и $n=20$, а также точное решение уравнения (1.7) при $f=0$ [2]. Вычисления проводились для четырех значений параметра a 0.2, 0.1, 0.05, 0.025 и значений параметра f , меняющихся в диапазоне $0 \leq f \leq 3,2$.

Результаты вычислений оказались идентичными для всех значений параметра a . Зависимость величины σ/α от параметра f для случая $a=0.1$, построенная по данным расчетов, представлена на фиг. 1, б. На рисунке кружками обозначены точки, соответствующие системе двадцати уравнений, крестиками — системе десяти уравнений. Зависимости величин g_i/α от параметра f носят аналогичный характер: с увеличением параметра f величины q_i/α меняются сначала непрерывно, затем претерпевают скачкообразное изменение.

Интервал значений параметра f , в котором характеристики кавитационного течения меняются скачкообразно



Фиг. 1

ком, как показали вычисления, не зависит от значения параметра a и оценивается неравенством $2.60 < f < 2.88$. Вне указанного интервала сходимость приближенных решений удовлетворительная. Так, вне интервала $2.60 < f < 2.88$ значения σ/α , найденные из систем уравнений с десятью и двадцатью неизвестными, отличаются друг от друга менее чем на 3 — 8%. При $f=0$ точные значения σ/α отличаются от приближенных менее чем на 3%.

Скачкообразное изменение величин q_i/α согласно данным расчета приводит к тому, что контур каверны $\eta(x)$ пронзает стенку. Следовательно, каверна не может существовать в некотором диапазоне больших значений параметра f . Диапазон малых значений параметра f , в котором каверна может существовать, ограничен сверху предельным значением f_* ($2.60 < f_* < 2.88$). Значению параметра f_* соответствует предельное значение числа Фруда по длине каверны $F_* = 1 / \sqrt{2f_*}$ ($0.416 < F_* < 0.438$), а при $U_0 = \text{const}$ — предельная длина каверны L_* . В случае непрерывного увеличения протяженности каверны при фиксированной скорости потока U_0 каверна с длиной, превосходящей предельную, получена быть не может.

Скачкообразное изменение параметров кавитационного течения означает переход через нуль определителя системы алгебраических уравнений, заменяющих интегро-дифференциальное уравнение. Отсюда можно показать, что предельное число Фруда отвечает условию, допускающему существование на гладкой стенке тонких каверн, контур которых в передней и задней точках подходит к стенке по касательной. Действительно, такие каверны описываются соотношениями (1.7), (1.5), (1.8) при $\alpha = 0$. В случае $\alpha = 0$ соответствующая система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных σ , q_i , согласно равенствам (1.9), является однородной. Система имеет решение, отличное от тривиального, только при условии равенства нулю ее определителя, то есть при условии $f = f_{*n}$, где $f_{*n} \rightarrow f_*$ при $n \rightarrow \infty$, n — число уравнений в системе.

2. Полученные выше выводы справедливы для тонких каверн. Предположение о тонкости каверны теоретически может быть реализовано при значениях параметра F ($F > F_*$), сколь угодно близких к предельному, поскольку величина α может быть выбрана достаточно малой. Однако, если фиксировать угол α , неограниченный рост относительной толщины каверны (отношения толщины каверны к ее длине) с понижением числа Фруда, предсказываемый линейной теорией, приведет к тому, что линейная теория окажется несправедливой раньше, чем будет достигнуто значение $F = F_*$. Поскольку ограничение $F > F_*$ представляет принципиальный интерес, ниже приводится приближенный анализ кавитационного течения, свободный от предположения о тонкости каверны. Анализ основывается на допущении о том, что линейная теория качественно правильно отражает характер зависимости между параметрами кавитационного течения при $F > F_*$.

Пусть за насадком при некотором фиксированном значении F ($F > F_*$) получена тонкая каверна. Если постепенно увеличивать давление в каверне, не меняя скорость потока U_0 , длина каверны согласно сделанному допущению будет увеличиваться. Относительная толщина каверны после того, как будет достигнуто некоторое значение параметра σ , также будет увеличиваться. Когда относительная толщина каверны станет достаточно большой, насадок практически перестанет играть роль в формировании каверны. Контур каверны, существующей без насадка, может либо касаться стенки, либо образовывать с ней некоторый угол. Первый случай качественно рассмотрен в предыдущем разделе работы. Обратимся ко второму случаю. В этом случае точка контура каверны, лежащая на стенке, будет критической точкой и поэтому, согласно уравнению Бернулли, должны выполняться соотношения

$$\sigma = -1, \quad \left(\frac{W}{U_0}\right)^2 = \frac{2g}{U_0^3} \eta(x) \tag{2.1}$$

Здесь W — величина скорости на контуре каверны, $\eta(x)$ — размерная ордината контура каверны. Вопрос о существовании каверны, форма которой удовлетворяет (2.1), эквивалентен вопросу о существовании тела, симметричного относительно горизонтальной оси, с законом распределения скоростей по его поверхности

$$\left(\frac{W}{U_0}\right)^2 = k \frac{\eta(x)}{c} \tag{2.2}$$

Здесь k — безразмерная постоянная, c — характерный линейный размер тела. Если тело такой формы существует, то линейные размеры каверны определяются согласно равенству

$$c = k \frac{U_0^3}{2g} \tag{2.3}$$

Рассматривая тела различной формы, удалось выяснить, что двуугольник с углом при вершине 90° весьма близко удовлетворяет условию (2.2). Как это видно, например, по данным, приведенным на фиг. 1 *а*, (сплошными линиями 1 и 2 на фиг. 1, *а* показана зависимость $(W/W_{\max})^2$ от η/c ($c = \eta_{\max}$) для двуугольников с углами при вершине $2\beta = 90^\circ$ и $2\beta = 100^\circ$. Пунктирная линия соответствует искомой зависимости, преобразованной к виду

$$(W/W_{\max})^2 = \eta/c, \quad (c = \eta_{\max}) \tag{2.4}$$

Параметры каверны, удовлетворяющей условиям (2.1), могут быть определены приближенно, исходя из аппроксимации ее контура дугой окружности, подходящей к стенке под углом $\beta = 45^\circ$. При этом удобно пользоваться соотношением

$$k = \left(\frac{W_{\max}}{U_0}\right)^2 \tag{2.5}$$

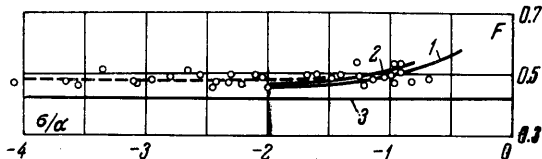
вытекающим из равенства (2.2). Полученные таким путем относительная толщина каверны и число Фруда соответственно имеют значения

$$\delta = \eta_{\max}/L = 0.207, \quad F = U_0/\sqrt{gL} = 0.423 \tag{2.6}$$

Найденное число Фруда согласуется с предельным числом Фруда, полученным из линейной теории.

Изложенное позволяет сделать следующий вывод. Повышение давления ($U_0 = \text{const}$) в тонкой длинной каверне приводит к образованию каверны, не зависящей от насадка — свободной каверны. Свободная каверна обладает максимальной длиной и может иметь контур двух типов — либо касающийся стенки, либо подходящий к ней под углом. Второй тип каверны, поскольку ему соответствует минимально возможное число кавитации $\sigma = -1$, является предельным по отношению к первому. Свободная каверна не формируется насадком и поэтому может сходиться с него, располагаясь в любом районе горизонтальной стенки. В качестве предельных параметров каверны, образованной за насадком, могут быть приняты параметры свободной каверны: $F_* \approx 0.423$, $\delta_* \approx 0.207$ и $\sigma_* = -1$.

3. Для проверки полученных теоретических выводов проводился эксперимент в гидротолчке. Объектом опытов являлась пластина с боковыми шайбами, на днищевую поверхность которой подавался воздух. Длина пластины составляла 945 мм, ширина — 200 мм, толщина — 20 мм, отстояние насадка от носика пластины — 315 мм,



Фиг. 2

расстояние между днищем пластины и нижней кромкой шайбы 295 мм. Пластина заглублялась на 120 мм. Опыты проводились с клиновидным насадком, имеющим длину 12 мм и высоту 2 мм. Эксперимент выполнялся при скоростях потока до 0.7 м/сек. Воздух в каверну подавался через отверстие в пластине, прикрытое отбойником, отверстие имело диаметр 10 мм и располагалось на расстоянии

70 мм за насадком. Предварительно каверна образовывалась путем нагнетания воздуха через щель непосредственно за насадок. В процессе опытов замерялась скорость потока, расход воздуха, давление в каверне, параметры каверны. Экспериментальные данные показали, что с увеличением расхода воздуха число кавитации понижалось и размеры каверны увеличивались. Увеличение размеров каверны в конечном счете приводило к сходу каверны с насадка. Сходя с насадка, каверна во всех случаях двигалась против потока, после чего занимала такое положение, при котором отверстие трубки, служащей для подачи воздуха, располагалось в концевой части каверны. Передняя часть поверхности каверны, сошедшей с насадка, имела правильную форму и всегда подходила к пластине под значительным углом, задняя часть сильно искажалась бурно выходящим из каверны потоком воздуха.

Результаты, характеризующие измерения длины каверны, представлены на фиг. 2. Здесь по вертикальной оси отложены значения чисел Фруда $F = U_0 / \sqrt{gL}$, по горизонтальной оси — значения чисел кавитации, отнесенные к углу раствора клина, σ/α ($\alpha = 1/6$). Экспериментальные точки, обозначенные кружками, охватывают диапазон изменения параметра $f_1 = af$ от 0.21 до 0.31. Пунктирная кривая — экспериментальная, сплошные кривые 1 и 2 соответствуют расчету по линейной теории, кривая 1 — $f_1 = 0.21$, кривая 2 — $f_1 = 0.31$. Горизонтальная линия 3 соответствует предельному числу Фруда $F_* = 0.423$. Точки, лежащие в правой части рисунка, относятся к тонким кавернам, точки, наиболее удаленные влево ($\sigma < -0.5$), — к кавернам, наблюдаемым непосредственно перед сходом с насадка, то есть предельным кавернам. Предельные параметры каверны F_* и δ_* согласно данным опытов составляют $F_* \approx 0.48$, $\delta_* \approx 0.14 \div 0.17$, предельное число кавитации — $\sigma_* \approx -(0.5 \div 0.6)$.

Сопоставление предельных параметров каверны, найденных теоретически и экспериментально, свидетельствует о том, что в действительности кризис течения, то есть сход каверны с насадка, наблюдается раньше, чем предсказывает теория — при больших значениях числа кавитации. Последнее можно объяснить влиянием вязкости жидкости. Действительно, каверны, обладающие большой толщиной, должны были создавать значительный градиент давления вдоль пластины, который мог привести к отрыву пограничного слоя, и, следовательно, к уменьшению давления в предполагаемой критической точке. Такое уменьшение давления равносильно увеличению предельного числа кавитации.

В целом данные опытов позволяют сделать вывод об удовлетворительном качественном согласовании теории и эксперимента.

Поступило 16. IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Перник А. Д. Проблемы кавитации. Судпромгиз, 1963.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.