

О ВЛИЯНИИ ЕДИНИЧНОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН (Москва)

Методом Бубнова—Галеркина получено решение задачи о стационарном обтекании единичной шероховатости вязкой несжимаемой жидкостью. Решение качественно исследуется на устойчивость. Вычисляется добавочное сопротивление, возникающее при появлении единичной шероховатости. Рассматривается определение напряжения трения по известному перепаду давлений на единичной шероховатости.

1. О стационарном обтекании единичной шероховатости. Рассматривается обтекание единичной шероховатости в форме цилиндра, основание которого — полукруг, причем ось цилиндра расположена перпендикулярно набегающему потоку в начале координат (фиг. 1). Уравнения плоского стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерных координатах имеют вид [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (\psi_1, \Delta \psi_1)}{\partial (r, \theta)} + \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi_1 = 0 \quad \left(R = \frac{u_0 d}{\nu} \right) \quad (1.1)$$

Здесь ψ_1 — функция тока; операторы

$$\frac{\partial}{\partial (r, \theta)}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

— якобиан и оператор Лапласа соответственно. При этом за характерный размер принята высота шероховатости d ; за характерную скорость u_0 — скорость на уровне шероховатости вдали от шероховатости. Будем предполагать, что возмущение, вносимое единичной шероховатостью, мало и, кроме того, примем линейное распределение скоростей набегающего потока. Функцию ψ_1 представим в виде

$$\psi_1 = \Psi + \psi_2, \quad \Psi = \frac{1}{2} y^2 \quad (1.2)$$

Так как ψ_2 достаточно мала по сравнению с Ψ , то, подставляя в уравнение (1.1) выражение для ψ_1 и пренебрегая членами, квадратичными относительно ψ_2 , получим линейное уравнение

$$L\psi_2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial (\Psi, \Delta \psi_2)}{\partial (r, \theta)} + \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi_2 = 0 \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$\psi_2 = -\frac{\sin^2 \theta}{2}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = -\sin^2 \theta \quad \text{при } r = 1$$

$$\psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \pi, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Представим ψ_2 в виде

$$\psi_2 = \psi_0 + \psi, \quad \psi_0 = \sin^2 \theta \left(-\frac{5}{2r^2} + \frac{2}{r^3} \right) \quad (1.5)$$

Тогда задача сведется к решению неоднородного линейного уравнения с однородными граничными условиями

$$L\psi = -L\psi_0$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \pi \quad (1.6)$$

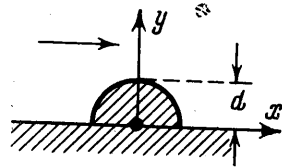
$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Эта задача была решена обобщенным методом Бубнова — Галеркина [2] до десятого приближения включительно. Решение найдено в виде

$$\begin{aligned} \psi &= a_1 \Phi_1 + \dots + a_{10} \Phi_{10} \\ \Phi_1 &= \frac{(1-r)^2}{r^4} \sin^2 \theta, & \Phi_2 &= \frac{(1-r)^2}{r^4} \sin^2 \theta \cos \theta \\ \Phi_3 &= \frac{(1-r)^2}{r^5} \sin^2 \theta, & \Phi_4 &= \frac{(1-r)^2}{r^4} \sin^2 \theta \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\Phi_5 = \frac{(1-r)^2}{r^5} \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \Phi_6 = \frac{(1-r)^2}{r^6} \sin^2 \theta, \quad \Phi_7 = \frac{(1-r)^2}{r^4} \sin^2 \theta \cos 3\theta$$

$$\Phi_8 = \frac{(1-r)^2}{r^5} \sin^2 \theta \cos 2\theta, \quad \Phi_9 = \frac{(1-r)^2}{r^6} \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \Phi_{10} = \frac{(1-r)^2}{r^7} \sin^2 \theta$$



Фиг. 1

Постоянные a_k определялись из обобщенных условий Галеркина [2]

$$\int_0^\pi d\theta \int_1^\infty \left[L \left(\sum_{k=1}^{10} a_k \Phi_k \right) g_m \right] dr = \int_0^\pi d\theta \int_1^\infty [-L(\Phi_0) g_m] dr \quad (m=1, \dots, 10) \quad (1.8)$$

$$g_m = \frac{\Phi_m r^2}{(1-r)^2 \sin^2 \theta}$$

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Ниже, в табл. 1, даны значения постоянных a_k , полученных при различных числах Рейнольдса R .

Таблица 1

R	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
3	-116.5	-32.07	+330.8	-2.106	+54.31	-329.9	-1.634	+2.177	-25.66	+112.1
4	-98.20	-33.38	+270.6	-277.5	+55.42	-265.8	-1.349	+2.280	-25.31	+89.44
5	-81.37	-34.70	+224.5	-2.779	+54.60	-220.1	-1.664	+2.678	-24.50	+73.89
7	-108.5	-31.44	+308.9	-1.839	+51.53	-307.9	-1.529	+2.253	-24.38	+104.5
10	-112.8	-28.13	+324.6	-1.866	+44.72	-325.2	-3.108	+3.770	-22.74	+111.2
12	-124.9	-25.68	+363.5	-1.376	+42.67	-367.6	-3.302	+3.950	-23.02	+126.9
20	-169.1	-4.660	+481.9	-2.537	+4.760	-498.0	+10.33	-14.37	+8.232	+166.8

Необходимость построения довольно высоких приближений объясняется характером сходимости и требованием повышенной точности при исследовании полученного течения на устойчивость. Представление о скорости сходимости метода Галеркина или обобщенного метода Галеркина можно получить, оценивая производные членов в решении (1.7). Например, в данном случае

$$\frac{\partial (a_{10}\Phi_{10}) / \partial y}{\partial (a_1\Phi_1) / \partial y} \approx 0.002 \quad \text{при } x=5, y=2$$

Кроме того, задача была также решена в девятом приближении. Получено

$$\left(\int_0^{10} [u_{10}(5, y) - y] dy \right) \left(\int_0^{10} [u_9(5, y) - y] dy \right)^{-1} = 1.004$$

Здесь $u_{10}(x, y)$ — распределение горизонтальной составляющей скорости, полученной из решения (1.7); $u_9(x, y)$ получено аналогично, но из девятого приближения.

2. Об устойчивости течения за единичной шероховатостью. Как известно из ряда экспериментальных работ (см. подробный обзор в книге Г. Шлихтинга [3]), положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный определенным образом связано с числом Рейнольдса $R = u_0 d / \nu$. Ниже приводятся некоторые результаты качественного исследования устойчивости течения за единичной шероховатостью.

Если, как обычно, считать, что далеко за шероховатостью течение близко к плоскопараллельному, то задача об устойчивости течения по отношению к бесконечно малым возмущениям сводится к задаче об отыскании собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда с однородными граничными условиями [3]

$$L_1 \Phi = [u(y) - c] (\Phi' - \alpha^2 r) - u''(y) \Phi = -\frac{i}{\alpha R} (\Phi^{IV} - 2\alpha^2 \Phi^{II} + \alpha^4 \Phi) \quad (2.1)$$

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \Phi \rightarrow 0, \quad \Phi' \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Здесь $u(y)$ — профиль скорости основного потока. Смысл всех остальных параметров в задаче (2.2) определяется тем, что функция тока возмущения $\psi(x, y, t)$ ищется в виде

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (c = c_r + ic_i)$$

Здесь $\varphi(y)$ — амплитуда колебания, α — волновое число, c_r — фазовая скорость, c_i — величина, позволяющая судить о нарастании или затухании возмущения. Следуя

Г. И. Петрову, применим к задаче об устойчивости метод Бубнова — Галеркина [2]. Предварительно предположим, что граничные условия $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi' \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ заменены условиями $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ при $y = 10$.

Если задача решается до n -го приближения включительно, то амплитуда колебания ищется в виде $\varphi^{(n)}(y) = a_1 \Phi_1^{\circ}(y) + \dots + a_n \Phi_n^{\circ}(y)$. Определяя постоянные a_k из обобщенных условий Галеркина [2]

$$\int_0^{10} \Psi_k^{\circ}(y) L_1 \varphi^{(n)}(y) dy = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

необходимо приравнять определитель этой алгебраической системы нулю. Тогда получим зависимость $F(\alpha, R, c) = 0$, или при $c_i = 0$

$$\operatorname{Re} \{F(\alpha, R, c_r)\} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \{F(\alpha, R, c_r)\} = 0$$

Отсюда при $c_i = 0$ получим [зависимость $f(\alpha, R) = 0$.

В рассматриваемом случае

$$\Phi_k^{\circ} = (y - 10)^2 y^{k+1}, \quad \Psi_k^{\circ} = y^{k-1} \quad (k = 1, 2)$$

Расчеты показывают, что волновое число колебания α_* , которое развивается раньше остальных, равно 0.35. Соответствующая этому колебанию фазовая скорость $c_* = 4.4$.

Максимальное значение волнового числа на нейтральной кривой $\alpha^* = 0.55$.

Критическое значение числа Рейнольдса R_* (соответствующее волновому числу $\alpha = \alpha_*$) порядка 4.

Согласно экспериментам Гольдштейна [4], единичная шероховатость начинает влиять на положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при числе Рейнольдса, не меньшем 7. Сравнение с более поздними работами (например, с работой Гани, Хама и Митуси [5]) затруднено, так как критическое число Рейнольдса R_* в этих работах сильно зависит от расстояния между передней кромкой пластины и единичной шероховатостью.

Обращает на себя внимание большая относительная длина волн неустойчивых возмущений. В размерных переменных $\lambda_{\min} = 11.5 d$.

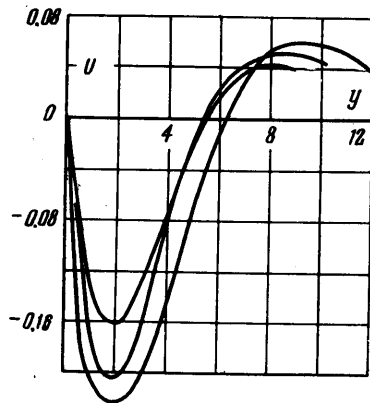
Аналогичная особенность характерна для нейтральной кривой, вычисленной Толмином [6] для пограничного слоя: $\lambda_{\min} \approx 6\delta$, где $\delta = 5.2 \sqrt{\nu x / U_{\infty}}$, x — расстояние до передней кромки, а U_{∞} — скорость на бесконечности.

Если учесть малость высоты шероховатости по сравнению с толщиной пограничного слоя, то легко заметить, что длины волн опасных возмущений для пограничного слоя значительно больше, чем в рассмотренном случае. Можно отметить также, что фазовая скорость на нейтральной кривой слабо меняется. При изменении числа Рейнольдса R от 4 до 20 величина c_r изменяется от 4.42 до 3.8 (при $\alpha = 0.4$) или до 2.7 (при $\alpha = 0.01$). Для обеих ветвей нейтральной кривой, начиная с некоторого числа Рейнольдса, волновое число α и фазовая скорость c_r уменьшаются, т. е. становятся опасными возмущения с большими длинами волн и более низкой частотой.

Качественный характер исследования течения на устойчивость поясняет и дополняет рассмотрение профиля скоростей за единичной шероховатостью. На фиг. 2 представлена зависимость $U(y) = u(y) - y$. Оказывается, что в профиле скоростей за единичной шероховатостью появляются точки перегиба, т. е. еще до проведения численных расчетов по устойчивости течения становится понятным существенное влияние единичной шероховатости на положение точки перехода: как известно, появление точек перегиба определенного вида характеризует менее устойчивые течения [3].

3. О дополнительном сопротивлении и об определении напряжения трения. Для некоторых вопросов гидродинамической теории смазки представляет интерес расчет сил, действующих на единичную шероховатость. Пользуясь полученным решением задачи о стационарном обтекании единичной шероховатости вязкой несжимаемой жидкостью, нетрудно рассчитать добавочное сопротивление, связанное с появлением шероховатости. Непосредственно из уравнений Навье-Стокса в цилиндрических координатах [1] легко получить, что на поверхности шероховатости

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) \quad (3.1)$$



Фиг. 2

Ниже приведены некоторые значения горизонтальной составляющей результирующей сил давления (F_1) в безразмерных координатах, действующих на элемент единичной шероховатости с шириной, равной высоте шероховатости

$$R = 3, 4, 5, 7, 10 \quad \left(f_1 = \frac{F_1}{d^2 \rho u_0^2} \right) \\ f_1 = 3.3, 3.2, 2.9, 2, 1.4$$

Естественно, что с появлением шероховатости изменяется также горизонтальная составляющая сил трения F_2 , но оказывается, что это изменение достаточно мало по сравнению с F_1 . Так, например,

$$R = 3, 4, 5, 7, 10 \quad \left(f_2 = \frac{F_2}{d^2 \rho u_0^2} \right) \\ f_2 = -1, -0.3, -0.15, -0.1, -0.12$$

Интересно сравнить полученные зависимости с величинами добавочных сопротивлений, найденных Л. Г. Степанянцем [7] также в линейной постановке, но без учета инерционных членов. По-видимому, приведенные Л. Г. Степанянцем результаты применимы при достаточно малых числах Рейнольдса. В частности, полученный парадоксальный вывод об уменьшении общего сопротивления при введении в поток единичной шероховатости [7] при числах Рейнольдса, которые больше трех, не имеет места. Однако качественное совпадение результатов очевидно. Например, результирующая сил трения при появлении шероховатости уменьшается, совпадают знаки также у горизонтальных составляющих результирующих сил давления. Ниже в табл. 2. приводится сравнение некоторых величин при различных числах Рейнольдса. Здесь f_1 и f_2 соответствуют величинам R_1 и R_2 , полученным Л. Г. Степанянцем (при условии, что $d = 1$).

Таблица 2

R	3	5	7	10
f_1	3.3	2.9	2	1.4
R_1	2/3	2/5	2/7	2/10
f_2	-1	-0.15	-0.1	-0.12
R_2	-0.82	-0.49	-0.35	-0.25

Известно также [8], что по разности давлений Δp в точках, принадлежащих как поверхности шероховатости, так и поверхности пластины, можно определить напряжение трения τ из формулы $\Delta p = C\tau$. В работе Дина [8] в результате пренебрежения инерционными членами в уравнениях Навье-Стокса получено, что $C = \text{const}$. Но из экспериментов Н. И. Константинова и Г. Л. Драгныша [9] следует, что коэффициент C существенно зависит от R . Вычисления при помощи формулы (3.4) дают

$$R = 3, 4, 5, 7, 10 \\ C = 11, 15, 19, 21, 29$$

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю Г. И. Петрову. Автор очень обязан также сотрудникам Института механики МГУ В. Т. Харину и В. А. Медведеву.

Поступило 6 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
2. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, 1940, т. 4, вып. 3.
3. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. Изд. иностр. лит., 1962, стр. 182.
4. Goldstein S. A note on roughness. Brit. ARC Rept. a Mem. 1936, 1763.
5. Tani J., Hama F. R., Mitui S. On the effect of a single roughness element on boundary layer transition. Rept. Inst. Sci. Technol. Univ. Tokyo, 1954, vol. 8, № 3, p. 125.
6. Tollmien W. Über die Entstehung der Turbulenz., Nachr. Ges. Wissenschaften Göttingen, Math.—phys. Kl., 1929, 21.
7. Степанянец Л. Г. Медленное движение жидкости вблизи деформированной поверхности. Тр. Ленингр. политехн. ин-т. Техническая гидромеханика, 1961, т. 217.
8. W. R. Dean. Note on the slow motion of fluid. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1936, vol. 32, p. 4.
9. Константинов Н. И., Драгныш Г. Л. К вопросу об измерении напряжения трения на поверхности. Тр. Ленингр. политехн. ин-т, 1955, № 176.