10. Захаров Ю. Г., Блюмина Л. Х. Исследование колебания цилиндрических тел в воздушном потоке. Сб. № 5, ЦАГИ, 1954, с. 17—34.
11. Gerrard J. H. An experimental investigation of the oscillating lift and drag of a circular cylinder Shedding turbulent vortices. J. Fluid Mech, 1961, vol. 11, N 2, p. 244—256.
12. Fung Y. C. Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at supercritical Reynolds Numbers. J. Aero. space Sci. 1960, vol. 27, N 11, p. 801 — 814.
13. Delany N. K., Sorensen N. E. Low speed drag of cylinders of various shapes. Nat. Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note, 1953, N 3038.
14. Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. J. Fluids Mechanics. 1961, vol. 10, N 3, p. 345—356.
15. Krüger F. Zur Hydrodynamik der Hiebtöne. Ann. Phys. 1919, vol. 60, N 19, p. 279—290.
16. Thom A. Eddies behind a circular cylinder. Aeronaut. Res. Council Rep. and Mem. 1930, N 1373.
17. Tyler E. Vortex Formation behind Obstacles of various Sections. Philos. Mag. J. Scie. 1931, vol. 11, N 72, p. 849—890.
18. Meier-Windhorst A. Flatterschwingungen von Zylinder im gleichmässingen Flüssigkeitsstrom. Mitt. Hydraulisch. Inst. Technischen Hochschule, München, 1939, N 9, S. 3—29.
19. Ден Гартог Д. Ж. Теория колебаний. гл. 7, 1942.
20. Den Hartog J. P. Recent Technical Manifestations of von Karman Vortex Wake Proc. Nat. Academy Sci. United States of America, 1954, vol. 40, N 3, p. 155—157.
21. Hausner G. Discussion of the paper by Price Peter «Suppression of the fluidinduced vibration of circular cylinds, J. Eng. Mech. Division Proc. Amer. Soc. Civil. Eng. 1956, N 4, p. 1091—13—1091—17.
22. Ozker M. S., Smith J. O. Factors Influencing the Dynamic Behavior of Tall Stacks under the Action of Wind. Trans. Amer. Soc. Mech., 1956, vol. 78, № 6, p. 1381—1391.
23. Nakagawa K., Fujino T., Arita Y., Ogatah Y., Masaki K. An Experimental Investigation of Aerodynamic Instability of Circular Cylinders at supercriti. cal Reynolds Numbers, Proc. Nith Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1959, p. 235—240.
24. Kinoshita M., Ono K., Hirowatari T., On the Vibration of Steel Stack. Proc. Fifth Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1956, p. 415—417.

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. МОВСЕСЯН (*Ереван*)

Строится преобразование независимых переменных и искомых функций для уравнений импульса и неразрывности одномерных нестационарных движений идеального газа, относительно которых исходная система уравнений инвариантна.

При применении этого преобразования исходное уравнение состояния газа преобразуется в новое, содержащее произвольные параметры. Это может позволить выборам параметров аппроксимировать сложное уравнение состояния данной среды (в частности,— для газов с учетом происходящих в них равновесных реакций и, пользуясь указанным преобразованием, свести к задаче с более простым уравнением состояния, для которого соответствующая задача решается более просто.

Исследуемые преобразования не имеют особенностей и не предполагают какихлибо существенных ограничений на гидродинамические величины — они применимы как при переменной энтропии, так и при течениях с ударными волнами.

1. Преобразование уравнений движения. Одномерное неустановившееся движение идеальной сжимаемой жидкости в переменных Эйлера описывается системой уравнений [1]

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_1 u_2) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь x_1 — координата; t_1 — время; p_1, ρ_1, u_1 — давление, плотность и скорость движения газа.

Из второго уравнения системы (1.1) явствует, что существует функция $x_2(x_1, t_1)$, связанная с параметрами потока соотношениями

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 1 + a\rho_1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t_1} = -a\rho_1 u_1 \tag{1.2}$$

где a — произвольная постоянная, причем $1/|a|$ имеет размерность плотности.

Предположим, что в любой точке плоскости x_1t_1 имеем $1 + a\rho_1 \neq 0$. При этом Якобиан функций $x_2 = x_2(x_1, t_1)$ и $t_2 = t_1$ не будут равны нулю и, следовательно, можно перейти к новым независимым переменным x_2, t_2. В новых переменных система уравнений (1.1) примет вид

$$\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t_2} + \rho_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho_2 u_2) = 0 \tag{1.3}$$

Здесь

$$p_2 = p_1, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + a\rho_1}, \qquad u_2 = u_1 \quad (1 + a\rho_1 \neq 0) \tag{1.4}$$

Таким образом, движение жидкости с параметрами p_1, ρ_1, u_1 в плоскости *1* (переменных x_1, t_1) соответствует движению жидкости с параметрами p_2, ρ_2, u_2 в плоскости *2* переменных x_2, t_2, при этом переход из плоскости *1* в плоскость *2* осуществляется по формулам (1.2) и (1.4). Обратный переход из плоскости *2* в плоскость *1* осуществляется по формулам

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 1 - a\rho_2, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial t_2} = a\rho_2 u_2, \qquad t_1 = t_2 \tag{1.5}$$

$$p_1 = p_2, \quad \rho_1 = \frac{\rho_2}{1 - a\rho_2}, \qquad u_1 = u_2 \quad (1 - a\rho_2 \neq 0) \tag{1.6}$$

В дальнейшем для определенности примем $a > 0$. Тогда из условия $\rho_1 > 0$ следует $\rho_2 > 0$. Для того чтобы имело место обратное положение, необходимо, чтобы выполнялось условие $1 - a\rho_2 > 0$. Из прямых и обратных формул преобразования видно, что плоскости *1* и *2* равноправны, но не равноценны. Последнее утверждение следует из того, что ρ_1 может быть как угодно большим, в то время как $\rho_2 < 1/a$. Заметим, что всюду $\rho_2 < \rho_1$. При $a = 0$ течения в обеих плоскостях тождественны.

2. Линии частицы. Из соответствующих уравнений неразрывности следует, что функции частицы $\psi_1(x_1, t_1)$ и $\psi_2(x_2, t_2)$ связаны с параметрами рассматриваемых потоков соотношениями

$$\rho_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \qquad \rho_1 u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1}, \qquad \rho_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \qquad \rho_2 u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} \tag{2.1}$$

Докажем, что $\psi_1(x_1, t_1) = \psi_2(x_2, t_2)$. В правой части выражения

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial x_1}$$

заменив соответствующие величины по формулам (1.2) и (2.1), получим

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = \rho_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}$$

Отсюда следует, что $\psi_2(x_2, t_2) = \psi_1(x_1, t_1) + f_1(t_1)$. Дифференцированием функции $\psi_2(x_2, t_2)$ по t_1 аналогично можно получить $\psi_2(x_2, t_2) = \psi_1(x_1, t_1) + f_2(x_1)$.

Следовательно, $f_1(t_1) = f_2(x_1) = \text{const}$. Если линии частицы $\psi_1(x_1, t_1) = 0$ поставить в соответствие линию частицы $\psi_2(x_2, t_2) = 0$ в плоскости *1*, то получим $\psi_2(x_2, t_2) = \psi_1(x_1, t_1)$. Таким образом, преобразование (1.2), (1.4) переводит линии $\psi_1(x_1, t_1) = k = \text{const}$ в плоскости *1* в линии $\psi_2(x_2, t_2) = k$ в плоскости *2*.

Далее, из (1.4) и (2.1) следуют равенства

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} \Big/ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} \Big/ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = -u_1 = -u_2 \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что в соответствующих точках обеих плоскостей углы между касательными к линиям $\psi_1(x_1, t_1) = k$ и $\psi_2(x_2, t_2) = k$ с соответствующими осями координат равны; однако легко показать, что кривизна этих линий в указанных точках различна.

Заметим, что линия $\psi_1(x_1, t_1) = k$ [$\psi_2(x_2, t_2) = k$] в пространственно-временной системе координат характеризует закон движения фиксированной частицы, и, следовательно, $\psi_1(x_1, t_1)$ [$\psi_2(x_2, t_2)$] является функцией лишь лагранжевой координаты $\xi_1(x_1, t_1)$ [$\xi_2(x_2, t_2)$] [2]. А поэтому каждой фиксированной частице в плоскости *1* соответствует определенная фиксированная частица в плоскости *2*, плотность которых различна.

3. Взаимозависимость решений двух задач, отличающихся с изучаемым преобразованием переменных. По известному решению некоторой задачи в плоскости *1* из формул (1.2) с точностью до произвольной слагаемой постоянной может быть определена координата x_2 в функции от x_1 и t_1

$$x_2 = \int_{L_1} (1 + a\rho_1)\, dx_1 - a\rho_1 u_1 dt_1 + m_1 \tag{3.1}$$

где криволинейный интеграл взят по любому контуру L_1, соединяющему заданные точки плоскости *1*.

Из уравнений $x_2 = x_2(x_1, t_1)$, $t_2 = t_1$, определив функцию $x_1 = x_1(x_2, t_2)$, по формулам (1.4) можно найти параметры потока p_2, ρ_2, u_2 плоскости *2* в независимых переменных x_2, t_2. Таким образом, из решения задачи в плоскости *1* путем простого пересчета может быть найдено решение соответствующей задачи в плоскости *2*.

В выражении (3.1) постоянную m_1 можно определять из разных соображений. Так, например, если потребовать, чтобы начала координат обеих пространственно-временных плоскостей соответствовали друг другу, то, положив нижний предел криволинейного интеграла (3.1) равным нулю, следует считать $m_1 = 0$.

В общем случае положительные и отрицательные направления одноименных осей координат совпадают. Для осей времен это очевидно. Из условий $1 + a\rho_1 > 0$ $[1 - a\rho_2 > 0]$ и из первого соотношения (1.2) [(1.4)] следует неравенство

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} > 0 \quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2} > 0\right)$$

Это и доказывает сделанное утверждение для пространственных осей координат. Более того, из (3.1) видно, что $x_2 \to \pm\infty$ при $x_1 \to \pm\infty$ и наоборот.

4. Уравнения состояния. Прежде всего заметим, что система уравнений (1.1) не изменится, если вместо (1.6) взять формулы

$$p_1 = \alpha + \beta p_2, \qquad \rho_1 = \frac{\gamma\rho_2}{1 - a\rho_2}, \qquad u_1 = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/2} u_2 \tag{4.1}$$

Здесь α, β, γ — произвольные постоянные.

Пусть в плоскости *1* давление есть функция плотности и энтропии s

$$p_1 = p_1(\rho_1, s) \tag{4.2}$$

Соответствующая термодинамическая связь в плоскости *2*, согласно формулам (1.4), будет

$$p_2 = \frac{1}{\beta} p_1 \left(\frac{\gamma\rho_2}{1 - a\rho_2}, s\right) \tag{4.3}$$

Из уравнений состояния (4.2) и (4.3) легко видеть, что скорости звука $c_1 = \sqrt{dp_1 / d\rho_1}$ и $c_2 = \sqrt{dp_2 / d\rho_2}$ связаны зависимостью [1]

$$c_2 = \sqrt{\gamma/\beta}\,(1 + a\rho_1)\, c_1 \tag{4.4}$$

а соответствующие числа Маха —

$$M_2 = (1 + a\rho_1) M_1 \tag{4.5}$$

Из формулы (4.5) явствует, что если $0 \leqslant M_1 \leqslant 1$, то $0 \leqslant M_2 \leqslant 1 + a\rho_1$ (напомним, что предполагается $a > 0$).

Известно, что вопрос о знаках первой и второй производных давления по плотности является существенным. Из (4.4) следует, что если $dp_1 / d\rho_1 > 0$, то и $dp_2 / d\rho_2 > 0$. Верно также обратное положение. Продифференцировав обе части соотношения (4.4) по $\rho_1 = \rho_1(\rho_2)$, согласно второй формуле (1.6), получим

$$\frac{d^2 p_2}{d\rho_2^2} = \frac{\gamma^2 (1 + a\rho_1)^3}{\beta} \left[2a \frac{dp_1}{d\rho_1} + (1 + a\rho_1) \frac{d^2 p_1}{d\rho_1^2}\right] \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что если $dp_1 / d\rho_1 > 0$, $d^2 p_1 / d\rho_1^2 > 0$, то и $d^2 p_2 / d\rho_2^2 > 0$, т. е. если в плоскости *1* с возрастанием плотности или давления скорость звука возрастает, то этим свойством обладает и течение в плоскости *2*.

Таким образом, если зависимость (4.2) отвечает какому-либо реализуемому течению жидкости в плоскости *1*, то соответствующая ей зависимость (4.9) также отвечает некоторому другому, вообще говоря, физически реальному течению жидкости в плоскости *2*. Набор свободных постоянных a, α, β, γ может позволить аппроксимировать заданную функцию $p_2 = p_2(\rho_2, s)$ зависимостью (4.3) и, тем самым, решение сложной задачи свести к более простой.

[1] Полные дифференциалы берутся вдоль линий $s = \text{const}$.

Пусть в плоскости *1* задано адиабатическое движение совершенного газа, уравнение состояния которого есть функция

$$p_1 = \theta(s)\,\rho_1^{\varkappa} \tag{4.7}$$

Здесь θ — функция энтропии, $\varkappa$ — показатель адиабаты. Тогда в плоскости *2* среда будет характеризоваться зависимостью

$$p_2 = \frac{1}{\beta}\,\theta(s)\,\frac{\gamma^{\varkappa}\rho_2^{\varkappa}}{(1-a\rho_2)^{\varkappa}} - \frac{\alpha}{\beta} \tag{4.8}$$

Здесь число аппроксимирующих постоянных равно трем. Если функция (4.7) — линейная ($\varkappa = 1$), то при соответствующем подборе постоянных можно заменить заданную связь $p_2 = p_2(\rho_2, s)$ зависимостью (4.8), где $\varkappa = 1$. Заметим, что при изотермических движениях в плоскости *1* ($\theta(s) \equiv \mathrm{const}$, $\varkappa = 1$) функция (4.8) выражает изотермическое течение реального газа Ван-дер-Ваальса, кинетическая энергия молекул которого намного больше потенциальной энергии их взаимодействия, соответствующей ван-дер-ваальсовым силам притяжения [3].

5. Течения с ударными волнами. Пусть в плоскости *1* имеется линия разрыва первого рода гидродинамических величин p_1, ρ_1, u_1. Рассмотрим в этой плоскости некоторую непрерывную линию L_1, пересекающую линию разрыва. Пользуясь соотношением (3.1), можно показать, что линия L_2 в плоскости *2*, соответствующая L_1, в окрестности точки разрыва гидродинамических величин также будет непрерывной.

Сделанное утверждение дает возможность, наряду с плоскостью *1*, рассматривать плоскость *2* с соответствующим образом линии разрыва.

Из условий на прямой ударной волне в плоскости *1*, вытекающих из уравнений импульса и неразрывности [1],

$$\rho_1'(V_1 - u_1')(u_1' - u_1'') = p_1' - p_1'', \qquad \rho_1'(V_1 - u_1') = \rho_1''(V_1 - u_1'') \tag{5.1}$$

и из соотношений (1.6) можно получить условия на ее образе в плоскости *2*

$$\rho_2'(V_2 - u_2')(u_2' - u_2'') = p_2' - p_2'', \qquad \rho_2'(V_2 - u_2') = \rho_2''(V_2 - u_2'') \tag{5.2}$$

Здесь величины с одним штрихом отвечают состоянию потока перед ударной волной, с двумя штрихами — за ударной волной; V_1 и V_2 — скорости движения ударных волн в плоскостях *1* и *2*. Легко видеть, что скорость движения ударной волны V_2 в плоскости *2* связана с параметрами потока V_1, ρ_1', u_1', ρ_1'', u_1'' плоскости *1* эквивалентными соотношениями

$$V_2 = V_1 + a\rho_1'(V_1 - u_1') = V_1 + a\rho_1''(V_1 - u_1'') \tag{5.3}$$

Пусть закон движения ударной волны в плоскости *1* задан уравнением $x_1 = x_1(t_1)$. Тогда закон движения ее образа в плоскости *2* может быть определен только по значениям параметров ρ_1, u_1 на линии разрыва в плоскости *1*. Действительно, не ограничивая общности, начала координат обеих плоскостей можно взять на линиях разрывов. Так как рассматриваются лишь точки, расположенные на этих линиях, то криволинейный интеграл (3.1) должен быть взят по контуру разрыва в плоскости *1*. Заметим, что не имеет значения вопрос о том, следует ли брать параметры течения газа до или после фронта ударной волны, так как имеет место легко доказываемое равенство

$$(1 + a\rho_1')dx_1 - a\rho_1'u_1'dt_1 = (1 + a\rho_1'')dx_1 - a\rho_1''u_1''dt_1 \qquad (dx_1 / dt_1 = V_1)$$

Ограничимся случаем, когда перед ударной волной жидкость не возмущена. Вычисляя интеграл (3.1), получим закон движения ударной волны в плоскости *2*

$$x_2 = (1 + a\rho_1^{\circ})x_1(t_2)$$

Легко видеть, что в обеих плоскостях закон движения поршней один и тот же.

Следует отметить, что если вместо (1.6) взять формулы (4.1), то в некоторых результатах могут быть лишь количественные изменения, что нетрудно проследить непосредственными выкладками.

Поступило 14 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Изд. иностр. лит., 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Изд-во «Наука», 1964.