

При  $2 \ln r/a \leq -\eta_\lambda - 1$  имеем семейство замкнутых поверхностей, имеющих форму, близкую к эллипсоидам вращения. Точки ( $r = 0, z = \pm a$ ) — суть точки сгущения указанных поверхностей.

Уравнение (1.2) имеет решение, определяемое равенством

$$\eta = br^{-2} (\sqrt{r^2 + z^2} - b) \quad (3.4)$$

При заданной постоянной  $b > 0$  этому решению соответствует семейство поверхностей

$$z = \pm b \left[ \left( 1 + \frac{\eta_\lambda^2 r^4}{b^4} - \frac{r^2}{b^2} (1 - 2\eta_\lambda) \right)^{1/2} \right] \quad (3.5)$$

При  $\eta_\lambda < 0.5$  уравнение (3.5) определяет семейство поверхностей, близких к поверхностям эллипсоидов вращения, сплюснутых при  $\eta_\lambda > 0$ , вытянутых при  $\eta_\lambda < 0$ . Точки ( $r = 0, z = \pm b$ ) есть точки сгущения указанных поверхностей.

Все определенные выше функции  $\eta(r, z)$  дважды непрерывно дифференцируемы в области течения жидкости вплоть до границ, за исключением точек сгущения поверхностей. Для всех вышеприведенных поверхностей справедливо равенство

$$\frac{dz}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 0$$

Поэтому при малых числах Рейнольдса для определения момента сил трения можно использовать приближенное равенство (2.11).

Поступило 14 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

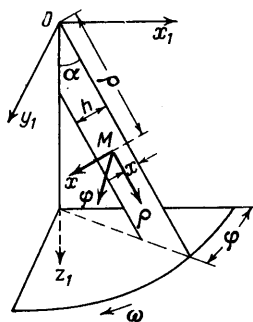
1. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф щ и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1, 1953.

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА МЕЖДУ ТАРЕЛКАМИ СЕПАРАТОРА

Е. М. ГОЛЬДИН (*Ленинград*)

В статье [1] рассмотрен поток вязкой жидкости в узком зазоре между двумя быстро вращающимися соосными конусами. Подобное движение имеет место между тарелками сепаратора в различных отраслях техники при разделении эмульсий и осветлении суспензий. Для нормальной работы тарельчатого сепаратора необходим ламинарный режим. В данной статье изучается гидродинамическая устойчивость межтарелочного потока и предлагается специфический критерий, согласующийся с практикой конструирования и эксплуатации сепараторов и имеющий простой физический смысл.

§ 1. **Основной поток.** Уравнения Навье — Стокса и неразрывности, записанные в системе координат  $\rho, \varphi, x$  (фиг. 1), жестко связанной с вращающимися тарелками,



Фиг. 1

можно упростить, пренебрегая силами инерции относительного движения, а также сохраняя для остальных сил только старшие члены с учетом малой толщины  $h$  зазора между тарелками и большой угловой скорости  $\omega$  их вращения. В итоге для установившегося межтарелочного потока получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} &= (r\omega^2 + 2\omega v_\varphi) \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial x^2}, & \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= -r\omega^2 \cos \alpha \\ \frac{\partial \Pi}{r \partial \varphi} &= -2\omega v_\rho \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2}, & \frac{\partial (rv_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$(\Pi = p/\delta, r = \rho \sin \alpha)$

Здесь  $\delta$  — массовая плотность;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $v_\rho, v_\varphi$  — компоненты скорости, третья компонента  $v_x$  положена равной нулю.

Ограничиваясь случаем осевой симметрии, найдем из (1.1) для скоростей

$$v_\rho(\rho, x) = \frac{Q}{2\pi r h} \frac{N(x, \lambda)}{N^0(\lambda)}, \quad v_\varphi(\rho, x) = \frac{Q}{2\pi r h} \frac{M(x, \lambda)}{N^0(\lambda)} \left( \lambda = h \frac{\sqrt{\omega \sin \alpha}}{\sqrt{\nu}} \right) \quad (1.2)$$

Здесь  $Q$  — расход жидкости в зазоре,  $\lambda$  — характерный безразмерный параметр. Индекс  $^{\circ}$  означает осреднение по толщине потока; при этом

$$\begin{aligned} N(x, \lambda) &= \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \left( \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{h} \sin \frac{\lambda(h-x)}{h} + \operatorname{sh} \frac{\lambda(h-x)}{h} \sin \frac{\lambda x}{h} \right) \\ M(x, \lambda) &= 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \left( \operatorname{ch} \frac{\lambda x}{h} \cos \frac{\lambda(h-x)}{h} + \operatorname{ch} \frac{\lambda(h-x)}{h} \cos \frac{\lambda x}{h} \right) \\ N^{\circ}(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda}, \quad M^{\circ}(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для реальных сепараторов величина  $\lambda$  порядка 10. Пренебрегая в двух последних формулах (1.3) величинами порядка  $\lambda^{-1}e^{-\lambda}$  и выше, имеем приближенно

$$N^{\circ}(\lambda) \approx \lambda^{-1}, \quad M^{\circ}(\lambda) \approx 1 - \lambda^{-1} \quad (1.4)$$

Для давлений из (1.1) получим

$$\Pi(\rho, x) = \frac{1}{2}(\rho \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 \omega^2 + \frac{Q\omega}{\pi h N^{\circ}(\lambda)} \ln \rho + \text{const} \quad (1.5)$$

Справедливость (1.2) и (1.5) можно проверить подстановкой в (1.1). Найденное решение соответствует условиям прилипания жидкости к поверхностям тарелок

$$v_{\rho} = v_{\varphi} = 0 \quad \text{при } x = 0, h \quad (1.6)$$

**2. Возмущенный поток.** Пользуясь методом малых возмущений [2], положим, что к основному потоку приложены какие-то малые нестационарные осесимметричные возмущения, которые вызовут, по сравнению с (1.2) и (1.5), добавочные слагаемые  $w_{\rho}, w_{\varphi}, w_x, \Delta \Pi$ , зависящие от  $\rho, x$  и времени  $t$ . Если эти слагаемые окажутся неограниченно возрастающими функциями  $t$ , основной поток считаем неустойчивым.

Дифференциальные уравнения возмущенного потока возьмем в виде, аналогичном (1.1), учитывая его осевую симметрию, а также нестационарность движения и добавочную компоненту скорости  $w_x$ , перпендикулярную тарелкам. Кроме того, из инерционных сил относительного движения, отброшенных ввиду их малости при выводе (1.1), включим старший член, связанный с квадратом окружной скорости  $v_{\varphi}$ .

В результате для возмущенного движения примем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(v_{\rho} + w_{\rho})}{\partial t} - \frac{(v_{\varphi} + w_{\varphi})^2}{r} \sin \alpha + \frac{\partial(\Pi + \Delta \Pi)}{\partial \rho} &= \\ &= r\omega^2 \sin \alpha + 2\omega(v_{\varphi} + w_{\varphi}) \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2(v_{\rho} + w_{\rho})}{\partial x^2} \\ \frac{\partial(v_{\varphi} + w_{\varphi})}{\partial t} &= -2\omega(v_{\rho} + w_{\rho}) \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2(v_{\varphi} + w_{\varphi})}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial(\Pi + \Delta \Pi)}{\partial x} &= -r\omega^2 \cos \alpha, \quad \frac{\partial[r(v_{\rho} + w_{\rho})]}{\partial \rho} + \frac{\partial(rw_x)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отсюда для возмущающего движения, пренебрегая  $w\varphi^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta \Pi)}{\partial \rho} - \frac{v_{\varphi}^2 + 2v_{\varphi}w_{\varphi}}{r} \sin \alpha &= 2\omega w_{\varphi} \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 w_{\rho}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial t} &= -2\omega w_{\rho} \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 w_{\varphi}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta \Pi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(rw_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial(rw_x)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Слагаемое  $(v_{\varphi}^2 / r) \sin \alpha$ , входящее в (2.2), не зависит от времени. Оно соответствует той части решения (2.2), которая стационарна и представляет, по сути дела, только поправку к формулам (1.2), (1.5) при частичном учете сил инерции относительного движения. Для изучения нестационарной части решения (2.2) указанное слагаемое отбросим. Исключая в оставшейся системе  $\Delta \Pi$ , найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w_{\rho}}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\omega \left( 1 + \frac{v_{\varphi}}{r\omega} \right) w_{\varphi} \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 w_{\rho}}{\partial x^2} \right] \quad (2.3)$$

Для дальнейших упрощений осредним  $v_{\varphi} / r\omega$  в (2.3). Пользуясь (1.2), (1.4), имеем

$$\frac{v_{\varphi}^{\circ}}{r\omega} = \frac{Q}{2\pi r^2 h \omega} \frac{M^{\circ}(\lambda)}{N^{\circ}(\lambda)} = -(\lambda - 1) \eta \quad \left( \eta = \frac{Q}{2\pi r^2 h \omega} = \frac{v_{\rho}^{\circ}}{r\omega} \right) \quad (2.4)$$

Здесь  $v_{\rho}^{\circ}$  — средняя по толщине меридиональная скорость,  $r\omega$  — переносная скорость тарелок. Для реальных сепараторов величина  $\eta$  порядка  $10^{-3}$  и изменяется

в зависимости от радиуса в сравнительно небольшом диапазоне. В дальнейшем будем полагать  $\eta$  фиксированным. Кроме того, учитывая условия прилипания и малую толщину щели, пренебрежем в левой части (2.3) производной  $\partial w_x / \partial \rho$  по сравнению с  $\partial w_\rho / \partial x$ . В результате для  $w_\rho, w_\varphi, w_x$  получим упрощенную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2\omega [1 - (\lambda - 1)\eta] w_\varphi \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial x^2} \right\} \\ \frac{\partial w_\varphi}{\partial t} &= -2\omega w_\rho \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial (r w_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial (r w_x)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

с краевыми условиями, соответствующими прилипанию жидкости к тарелкам

$$w_\rho = w_\varphi = w_x = 0 \quad \text{при } x = 0, h \quad (2.6)$$

§ 3. **Вековое уравнение.** Решение (2.5) ищем в виде

$$\begin{aligned} w_\rho(\rho, x, t) &= X_1(x) R_1(\rho) \exp[\omega \sin \alpha (a + bi) t] \\ w_\varphi(\rho, x, t) &= X_2(x) R_2(\rho) \exp[\omega \sin \alpha (a + bi) t] \\ w_x(\rho, x, t) &= X_3(x) R_3(\rho) \exp[\omega \sin \alpha (a + bi) t] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $a, b$  — некоторые вещественные параметры, причем знак  $a$  определяет, очевидно, устойчивость основного потока. Введем обозначения

$$A = a + bi, \quad B = 4[1 - (\lambda - 1)\eta] \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) в (2.5), получим после разделения переменных

$$\frac{X_1''' - (\lambda^2/h^2) A X_1'}{(\lambda^2/2h^2) B X_2'} = \frac{2X_1}{A X_2 - (h^2/\lambda^2) X_2''} = -\frac{R_2}{R_1} = C, \quad \frac{X_3'}{X_1} = -\frac{(r R_1)'}{r R_3} = E \quad (3.3)$$

где  $C, E$  — постоянные. Из первых уравнений (3.3) находим

$$X_1 = \frac{C}{2} (A X_2 - \frac{h^2}{\lambda^2} X_2''), \quad X_2 \nu - \frac{2\lambda^2}{h^2} A X_2''' + \frac{\lambda^4}{h^4} (A^2 + B) X_2' = 0 \quad (3.4)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда корни характеристического уравнения для второго уравнения (3.4)

$$z_1 = -z_2 = \frac{\lambda}{h} \sqrt{A + i\sqrt{B}}, \quad z_3 = -z_4 = \frac{\lambda}{h} \sqrt{A - i\sqrt{B}}, \quad z_5 = 0 \quad (3.5)$$

различны. При этом, согласно (3.4) и вторым уравнениям (3.3), получим

$$\frac{2}{i\sqrt{BC}} X_1 = -c_1 \operatorname{sh} z_1 x - c_2 \operatorname{ch} z_1 x + c_3 \operatorname{sh} z_3 x + c_4 \operatorname{ch} z_3 x + c_5 \frac{A}{i\sqrt{B}}$$

$$X_2 = c_1 \operatorname{sh} z_1 x + c_2 \operatorname{ch} z_1 x + c_3 \operatorname{sh} z_3 x + c_4 \operatorname{ch} z_3 x + c_5$$

$$\frac{2}{i\sqrt{BCE}} X_3 = -c_1 \frac{\operatorname{ch} z_1 x}{z_1} - c_2 \frac{\operatorname{sh} z_1 x}{z_1} + c_3 \frac{\operatorname{ch} z_3 x}{z_3} + c_4 \frac{\operatorname{sh} z_3 x}{z_3} + c_5 \frac{Ax}{i\sqrt{B}} + c_6 \quad (3.6)$$

В соответствии с краевыми условиями (2.6) потребуем обращения в нуль  $X_1, X_2, X_3$  при  $x = 0, h$ , что приводит к вековому уравнению

$$\operatorname{sh} \zeta_1 \operatorname{sh} \zeta_3 \left[ \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3} \operatorname{ch} \zeta_1 (\operatorname{sh} \zeta_3 - \zeta_3 \operatorname{ch} \zeta_3) + \frac{\zeta_3^2}{\zeta_1} \operatorname{ch} \zeta_3 (\operatorname{sh} \zeta_1 - \zeta_1 \operatorname{ch} \zeta_1) \right] = 0$$

$$\left( \zeta_1 = 1/2 z_1 h = 1/2 \lambda \sqrt{A + i\sqrt{B}}, \quad \zeta_3 = 1/2 z_3 h = 1/2 \lambda \sqrt{A - i\sqrt{B}} \right) \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) определяет вещественную и мнимую части  $A = a + ib$ , при которых возможны нетривиальные возмущения типа (3.1) или их композиции.

§ 4. **Критерий устойчивости.** Полагая в (3.7)  $\operatorname{sh} \zeta_1 = 0$  и пользуясь обозначением для  $\zeta_1$ , найдем

$$\lambda \sqrt{A + i\sqrt{B}} = 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.1)$$

Здесь пока исключен случай  $k = 0$ , при котором, согласно (3.5), появляются кратные корни  $z_1 = z_2 = z_5 = 0$ . Подставляя (3.2) в (4.1), получим

$$a + bi + 2i \sqrt{1 - (\lambda - 1)\eta} = -\frac{4k^2\pi^2}{\lambda^2} \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что  $a < 0$  при

$$(\lambda - 1)\eta < 1 \quad (4.3)$$

При этом основной поток устойчив. Наоборот, при

$$(\lambda - 1) \eta > 1 \tag{4.4}$$

возможны положительные значения  $a$ , соответствующие нарушению устойчивости. Возвращаясь к (3.7), положим  $\text{sh } \zeta_3 = 0$ , что, аналогично (4.2), дает

$$a + bi - 2i \sqrt{1 - (\lambda - 1) \eta} = -\frac{4k^2 \pi^2}{\pi^2} \tag{4.5}$$

Согласно (4.5), значение  $a$  отрицательно независимо от величины  $(\lambda - 1) \eta$ , и основной поток устойчив.

Покажем теперь, что третий множитель в (3.7) не обращается в нуль при условии (4.3), если  $a > 0$ , т. е. не дает новых случаев неустойчивости по сравнению с (4.4).

Заметим, что обращение указанного множителя в нуль при  $\text{ch } \zeta_1 = \text{ch } \zeta_3 = 0$  соответствует, как легко проверить, значению  $a < 0$ . Поэтому, приравнявая квадратную скобку в (3.7) нулю и сокращая на  $\text{ch } \zeta_1 \text{ch } \zeta_3$ , получим

$$f(\zeta_1) + f(\zeta_3) = 0 \quad (f(\zeta) = (\text{th } \zeta - \zeta) \zeta^{-3}) \tag{4.6}$$

Разложим  $\text{th } \zeta$  на простейшие дроби [3] и преобразуем, что дает

$$f(\zeta) = -\frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \frac{1}{(2k-1)^2 \pi^2 + 4\zeta^2} \tag{4.7}$$

Уравнение (4.6) в развернутом виде после сокращения на множитель запишется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left[ \frac{1}{(2k-1)^2 \pi^2 + 4\zeta_1^2} + \frac{1}{(2k-1)^2 \pi^2 + 4\zeta_3^2} \right] = 0 \tag{4.8}$$

где, согласно (3.2) и обозначениям (3.7),

$$4\zeta_1^2 = \lambda^2 [a + bi + 2i \sqrt{1 - (\lambda - 1) \eta}], \quad 4\zeta_3^2 = \lambda^2 [a + bi - 2i \sqrt{1 - (\lambda - 1) \eta}] \tag{4.9}$$

Пусть теперь выполняется (4.3). Тогда из (4.9) следует, что  $4\zeta_1^2$  и  $4\zeta_3^2$  имеют одинаковую реальную часть  $\lambda^2 a$ . При этом реальная часть каждого слагаемого в (4.8) имеет вид

$$\frac{(2k-1)^2 \pi^2 + \lambda^2 a}{(2k-1)^2} \left[ \frac{1}{|(2k-1)^2 \pi^2 + 4\zeta_1^2|^2} + \frac{1}{|(2k-1)^2 \pi^2 + 4\zeta_3^2|^2} \right]$$

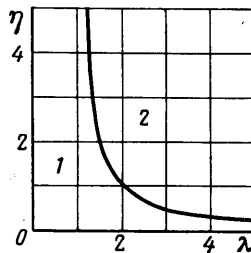
и при  $a > 0$  будет положительной. Следовательно, сумма таких слагаемых не может равняться нулю, что и подтверждает невозможность обращения в нуль третьего множителя из (3.7) при  $a > 0$  и  $(\lambda - 1) \eta < 1$ .

Итак, в случае различных корней (3.5) характеристического уравнения для второго уравнения (3.4) устойчивость межтарелочного потока обеспечивается условием (4.3). К такому же критерию устойчивости придем при аналогичном рассмотрении всевозможных кратных корней (3.5).

Отметим, что положительное значение  $\eta$  соответствует расходящемуся межтарелочному потоку. Для сходящегося потока  $\eta < 0$  и условие (4.3) всегда выполняется.

Зоны устойчивости показаны на фиг. 2, где 1 соответствует устойчивости, 2 — неустойчивости.

Физический смысл специфической критериальной величины  $(\lambda - 1) \eta$  очевиден из (2.4). Она представляет отношение средней окружной скорости жидкости относительно тарелок к переносной скорости тарелок. При критическом значении  $(\lambda - 1) \eta = 1$  средние слои вязкого межтарелочного потока не вовлекаются во вращательное движение тарелок. В реальных сепараторах значение  $(\lambda - 1) \eta$  не превышает 0.1. Можно полагать, что вычисленное критическое значение несколько завышено за счет допущенных упрощений.



Фиг. 2

Поступило 27 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдин Е. М. Гидродинамический поток между тарелками сепаратора. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд-во иностр. литер., 1958.
3. Рыжик И. М., Гладштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.