ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ МАСС ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Т. Ф. ИВАНОВ *(Гурьев)*

Исследуется задача об установившихся вращательных движениях несжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса ($R < 1$) между поверхностями вращения, заданными в параметрической форме (1.3). Решения уравнения Навье — Стокса отыскиваются методом разложения по малому параметру R. Показано, что в случае дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей решение задачи в первом приближении позволяет определить момент сил трения на неподвижной твердой поверхности (1.3) с точностью до R^2. Исследуются некоторые решения уравнения (1.2) и соответствующие им семейства поверхностей вращения (1.3).

1. Установившееся осесимметрическое движение жидкости определяется в цилиндрической системе координат (z, φ) системой уравнений

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = - \frac{1}{\tau} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \tag{1.1}$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

Пусть задана безразмерная, вещественная, однозначная, непрерывная функция $\eta (r, z)$ переменных r, z, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$r \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \tag{1.2}$$

Заданной функции $\eta (r, z)$ соответствует бесконечное семейство T соосных взаимно не пересекающихся поверхностей вращения S_λ, определяемых равенствами вида

$$\eta (r, z) = \eta_\lambda \qquad (\eta_\lambda = \text{const}) \tag{1.3}$$

Пусть из семейства T взяты две (жесткие) поверхности S_1, S_2, пространство между ними заполнено вязкой несжимаемой жидкостью и поверхности вращаются на оси z с заданными постоянными угловыми скоростями Ω_1, Ω_2, причем $|\Omega_2| \geqslant |\Omega_1|$.

Для решения задачи об установившемся движении жидкости, вызванном вращением поверхностей S_1, S_2, требуется решить систему (1.1) при граничных условиях

$$v_\varphi = \Omega_1 r \quad \text{при } \eta = h_1, \quad v_\varphi = \Omega_2 r \quad \text{при } \eta = \eta_2 \tag{1.4}$$
$$v_r = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{при } \eta = h_1, \eta_2, \quad v_r = 0 \quad \text{при } r = 0$$

Обозначив максимальное значение переменной r в области течения жидкости через rm, определим число Рейнольдса равенством

$$R = |\Omega_2| \, rm^2 / \nu \tag{1.5}$$

Очевидно, что во всей области течения жидкости выполняется неравенство

$$R \geqslant |\Omega| r^2 / \nu$$

Проведем замену составляющих скорости и давления жидкости безразмерными переменными $\omega (r, z)$, $v (r, z)$, $u (r, z)$, $D (r, z)$ посредством соотношений

$$v_\varphi = |\Omega_2| \, r\omega, \quad v_r = |\Omega_2| \, rv, \quad v_z = |\Omega_2| \, r_m u, \quad p - p_0 = |\Omega_2|^2 r_m^2 \rho D$$

Подставляя функции ω, v, u, D и их частные производные в уравнение (1.1) и проводя элементарные преобразования, получим систему в безразмерной форме

$$R \left(\frac{r^2 v}{r_m} \frac{\partial \omega}{\partial r} + ru \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{2r\omega v}{r_m} \right) = r_m r \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + r_m r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + 3r_m \frac{\partial \omega}{\partial r} \tag{1.6}$$

$$R \left(\frac{r^2 v}{r_m} \frac{\partial v}{\partial r} + ru \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v^2}{r_m} - \frac{r\omega^2}{r_m} \right) = - R r_m \frac{\partial D}{\partial r} + r_m r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r_m r \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 3r_m \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$R \left(rv \frac{\partial u}{\partial r} + r_m u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - R r_m \frac{\partial D}{\partial z} + r_m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r_m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{r_m^2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$r_m \frac{\partial u}{\partial z} + r \frac{\partial v}{\partial r} + 2v = 0$$

Граничные условия задачи принимают вид

$$\omega = \frac{\Omega_1}{|\Omega_2|} \quad \text{при } \eta = \eta_1; \quad \omega = \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} \quad \text{при } \eta = \eta_2; \quad v = 0, \; u = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_1, \eta_2 \tag{1.7}$$

Из теорем существования [1] ламинарных решений системы уравнений Навье — Стокса следует, что при малых числах Рейнольдса краевая задача (1.6), (1.7) имеет единственное решение. Это решение можно построить или при помощи разложения по малому параметру R или методом последовательных приближений, который приводит к тому же разложению решения по малому параметру R.

2. Решение краевой задачи отыскиваем при помощи разложения по малому параметру R

$$\begin{gathered} \omega = \varphi_0(r, z) + \sum_{n=1} R^{2n}\varphi_n(r, z), \qquad D = q_0(r, z) + \sum_{n=1} R^{2n} q_n(r, z) \\ v = \sum_{n=1} R^{2n-1}\varphi_n(r, z), \qquad u = \sum_{n=1} R^{2n-1}\psi_n(r, z) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Для выполнения граничных условий (1.7) требуем, чтобы функции $\Phi_n, \varphi_n, \psi_n$ удовлетворяли условиям

$$\begin{gathered} \Phi_0 = \frac{\Omega_1}{|\Omega_2|} \quad \text{при } \eta = \eta_1, \qquad \Phi_0 = \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|} \quad \text{при } \eta = \eta_2 \\ \Phi_n = 0 \quad \varphi_n = 0, \quad \psi_n = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_1, \eta_2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Подставляя решения (2.1) в (1.6) и приравнивая члены при равных степенях R, получим уравнения, линейные относительно искомых функций:

$$r\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} + r\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} + 3\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} r\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + r\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + 3\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = R\left(\frac{\partial q_0}{\partial r} - r\frac{{\Phi_0}^2}{{r_m}^2}\right), \quad r\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + r\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = R\frac{r}{r_m}\frac{\partial q_0}{\partial z} \\ r_m\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + 2\varphi_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$r\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} + r\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + 3\frac{\partial\Phi}{\partial r} = R\left(\frac{r^2}{{r_m}^2}\varphi_1\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} + \frac{r}{r_m}\psi_1\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} + \frac{2r\varphi_1\Phi_0}{{r_m}^2}\right) \tag{2.5}$$

. . . .

Из (1.2) и (2.3) следует, что граничные условия (2.2) для Φ_0 будут выполняться тогда и только тогда, когда функция Φ_0 равна:

$$\Phi_0 = c_0 + c_1\eta$$

$$c_0 = \frac{\Omega_1}{|\Omega_2|} - \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)\eta_2}{|\Omega_2|(\eta_2 - \eta_1)}, \qquad c_1 = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{|\Omega_2|(\eta_2 - \eta_1)} \tag{2.6}$$

Так как функция $\eta(r, z)$ полагается заданной, то, подставляя решения (2.6) в систему уравнений (2.4), нужно решить эту систему, требуя выполнения условий (2.2) для φ_1, ψ_1. Затем, подставляя полученные решения для Φ_0, q_0, φ_1, ψ_1 в уравнение (2.5), следует решить это уравнение относительно Φ_1 и т.д.

Если функция $\eta(r, z)$ задана в виде алгебраической формулы, то функции q_0, φ_1, ψ_1, Φ_1 в ряде случаев можно выразить в виде рядов и даже в виде алгебраических функций от r, z. В некоторых прикладных задачах, связанных с вращательным движением жидкости (разработка ротационных вискозиметров, вращающихся гидравлических тормозов и др.), основная задача состоит в определении момента сил трения относительно одной из твердых поверхностей вращения.

Так как в сформулированной выше задаче момент сил трения зависит только от функции $\omega(r, z)$, то, согласно (2.1), для его определения с точностью до R^2 достаточно ограничиться первым приближением, т. е. полагать $\omega = \Phi_0$; $v, u, D \equiv 0$. При этом погрешность первого приближения для момента оказывается при $R < 1$ несущественной, если момент сил трения определяется относительно поверхности S_1 неподвижного тела и если поверхности S_1, S_2 достаточно гладкие.

Пусть функция $\eta(r, z)$ дважды непрерывно дифференцируема во всей области течения жидкости вплоть до границ, тогда, согласно (1.2), (1.3), поверхности S_1, S_2 также дважды непрерывно дифференцируемы, и в этом случае составляющие скорости течения жидкости дважды непрерывно дифференцируемы вплоть до границ S_1, S_2 [1]

Поэтому, левые части трех первых уравнений (1.7) при приближении к поверхности S_1 стремятся к нулю асимптотически и на поверхности S_1 равны нулю. В этом случае, согласно (1.6), (2.1), (2.2) и (2.6), строгое решение относительно функции $\omega(r, z)$ можно записать в виде

$$\omega = \frac{\Omega_2(\eta - \eta_1)}{|\Omega_2|(\eta_2 - \eta_1)}\left[1 + \sum_{n-1} R^{2n} A_n(r, z)\right] \tag{2.7}$$

Функция $r\omega(r, z)$ дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границ, поэтому функции $A_n(r, z)$ непрерывны, а функции $rA_n(r, z)$ непрерывно дифференцируемы вплоть до границ. Так как функции $A_n(r, z)$ равны нулю при $\eta = \eta_2$, то, по крайней мере, при $r > 0$ справедлива оценка

$$R^{2n} A_n(r, z) \sim R^{2n} \quad \text{при } \eta = \eta_1 \tag{2.8}$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость функций $rA_n(r, z)$, составляющую напряжения трения $\tau_{\varphi r}$ на неподвижной границе S_1 определяем равенством

$$\tau_{\varphi r} = \mu r \frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\mu\Omega_2 r}{\eta_2 - \eta_1}\left[1 + \sum_{n=1} R^{2n} A_n(r, z)\right] \tag{2.9}$$

Возьмем какой-либо участок поверхности S_1, на котором переменная r монотонно возрастает или монотонно убывает ($r_2 > r_1$). Момент трения на кольце этого участка поверхности определяется равенством

$$|M_{1,2}| = \left|\frac{2\pi\mu\Omega_2}{\eta_2 - \eta_1}\int_{r_1}^{r_2} r^3\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{\eta_1}\left[1 + \sum_{n=1} R^{2n} A_n(r, z)\right]\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)_{\eta_1}\right]^{1/2} dr\right| \tag{2.10}$$

Здесь dz / dr определяется из (1.3).

Для поверхностей с конечными значениями производной dz / dr при $r \to 0$ момент трения на участке поверхности S_1 в окрестности точки $r = 0$, согласно (2.9), исчезающе мал, а при $r > 0$ справедлива оценка (2.8).

Поэтому при $R < 1$ и дважды непрерывно дифференцируемых поверхностях s_1, s_2 момент сил трения можно без существенной погрешности определять приближенным равенством

$$|M_{1,2}| = \left|\frac{2\pi\mu\Omega_2}{\eta_2 - \eta_1}\int_{r_1}^{r_2} r^3\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)_{\eta_1} dr\right| \tag{2.11}$$

3. Рассмотрим некоторые решения уравнения (1.2) и соответствующие им семейства поверхностей.

При $\eta = a^3(r^2 + z^2)^{-3/2}$ имеем семейство концентрических сфер. Иной подход к решению задачи о течении жидкости между сферами в первом приближении приведен в [2].

Полагая $\eta = r_0 r^{-2}(r^2 + z^2 + z)$, получим семейство параболоидов вращения.

Полагая $\eta = z z_0^{-1}(r_0^2 r^{-2} + c)$, получим семейство поверхностей, определяемых равенствами

$$\frac{z}{z_0} = \frac{\eta_2 r^2}{r_0^2 + c r^2} \tag{3.1}$$

При $c < 1$ имеем семейство поверхностей, имеющих при $z \to \infty$ форму круглых цилиндров.

Точка $(r, z = 0)$ есть точка сгущения указанных поверхностей. Поэтому при течении жидкости между поверхностями (3.1) s_1, s_2 переменная $\eta(r, z)$ однозначно определена и, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируема во всей области течения жидкости вплоть до границ, за исключением окрестности точки $(r, z = 0)$, в которой жидкости нет. Пусть

$$\eta = \frac{z^2 - a^2}{r^2} - 2\ln\frac{r}{a} \tag{3.2}$$

Легко убедиться подстановкой, что функция η удовлетворяет уравнению (1.2). Семейство поверхностей, соответствующих (3.2), при заданной постоянной a^2 определяется уравнениями

$$z = \pm a\left[\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\left(\eta_\lambda + 2\ln\frac{r}{a}\right)\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

При $2 \ln r / a \leqslant -\eta_\lambda - 1$ имеем семейство замкнутых поверхностей, имеющих форму, близкую к эллипсоидам вращения. Точки ($r = 0$, $z = \pm a$) — суть точки сгущения указанных поверхностей.

Уравнение (1.2) имеет решение, определяемое равенством

$$\eta = br^{-2} (\sqrt{r^2 + z^2} - b) \tag{3.4}$$

При заданной постоянной $b > 0$ этому решению соответствует семейство поверхностей

$$z = \pm b \left[\left(1 + \frac{\eta_\lambda^2 r^4}{b^4} - \frac{r^2}{b^2} (1 - 2\eta_\lambda) \right]^{1/2} \tag{3.5}$$

При $\eta_\lambda < 0.5$ уравнение (3.5) определяет семейство поверхностей, близких к поверхностям эллипсоидов вращения, сплюснутых при $\eta_\lambda > 0$, вытянутых при $\eta_\lambda < 0$. Точки ($r = 0$, $z = \pm b$) есть точки сгущения указанных поверхностей.

Все определенные выше функции η (r, z) дважды непрерывно дифференцируемы в области течения жидкости вплоть до границ, за исключением точек сгущения поверхностей. Для всех вышеприведенных поверхностей справедливо равенство

$$\frac{dz}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 0$$

Поэтому при малых числах Рейнольдса для определения момента сил трения можно использовать приближенное равенство (2.11).

Поступило 14 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

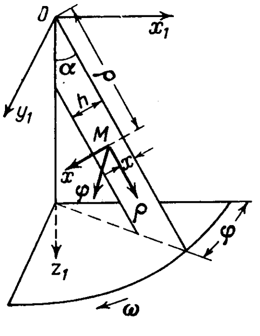
1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
2. Ландау Л. Д., Лифщиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1, 1953.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА МЕЖДУ ТАРЕЛКАМИ СЕПАРАТОРА

Е. М. ГОЛЬДИН (Ленинград)

В статье [1] рассмотрен поток вязкой жидкости в узком зазоре между двумя быстро вращающимися соосными конусами. Подобное движение имеет место между тарелками сепаратора в различных отраслях техники при разделении эмульсий и осветлении суспензий. Для нормальной работы тарельчатого сепаратора необходим ламинарный режим. В данной статье изучается гидродинамическая устойчивость межтарелочного потока и предлагается специфический критерий, согласующийся с практикой конструирования и эксплуатации сепараторов и имеющий простой физический смысл.

§ 1. **Основной поток.** Уравнения Навье — Стокса и неразрывности, записанные в системе координат ρ, φ, x (фиг. 1), жестко связанной с вращающимися тарелками, можно упростить, пренебрегая силами инерции относительного движения, а также сохраняя для остальных сил только старшие члены с учетом малой толщины h зазора между тарелками и большой угловой скорости ω их вращения. В итоге для установившегося межтарелочного потока получим уравнения



Фиг. 1

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = (r\omega^2 + 2\omega v_\varphi) \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -r\omega^2 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial \Pi}{r \partial \varphi} = -2\omega v_\rho \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial (r v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$(\Pi = p/\delta, \ r = \rho \sin \alpha) \tag{1.1}$$

Здесь δ — массовая плотность; ν — кинематическая вязкость; v_ρ, v_φ — компоненты скорости, третья компонента v_x положена равной нулю.

Ограничиваясь случаем осевой симметрии, найдем из (1.1) для скоростей

$$v_\rho (\rho, x) = \frac{Q}{2\pi r h} \frac{N(x, \lambda)}{N^\circ (\lambda)}, \quad v_\varphi (\rho, x) = \frac{Q}{2\pi r h} \frac{M(x, \lambda)}{N^\circ (\lambda)} \quad \left(\lambda = h \frac{\sqrt{\omega \sin \alpha}}{\sqrt{\nu}}\right) \tag{1.2}$$