

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ

Р. К. ТАГИРОВ (Москва)

С учетом начального турбулентного пограничного слоя определяется донное давление p_b при обтекании плоского уступа сверхзвуковым неадиабатическим потоком. Подобная задача рассматривалась и ранее. В работах [1,2] при ее решении использовано условие Корста [3], предполагающее равенство полного давления p_j^* на линии постоянных масс давления за замыкающим косым скачком уплотнения. Однако давление в сечении прилипания p_* на 30—40% ниже давления за замыкающим скачком [4], и, следовательно, условие Корста является недостаточно точным. Поэтому в указанных работах достигнуто лишь качественное соответствие с экспериментом. В работе [5], в отличие от [1,3], вводится p_* , однако определяется при помощи эмпирического коэффициента. В настоящей работе для нахождения p_b используется условие сохранения массы в донной области, записываемое в виде равенства $p_j^* = p_*$, где p_* определяется из предположения о минимуме толщины диссипативного слоя δ в сечении прилипания.

Удовлетворительное соответствие с имеющимися экспериментальными данными достигается без поправочных коэффициентов. В простейшем случае, когда толщина начального пограничного слоя $\delta_1 = 0$, излагаемый способ не сложнее способа Корста*. Определение донного давления при $\delta_1 = 0$ рассматривается в § 1, при $\delta_1 > 0$ — в § 2.

§ 1. Будем предполагать, что схема течения (фиг. 1) состоит из пяти областей: 1) область набегающего потока, 2) область расширения в вереве воли разрежения, 3) область смешения, 4) область повышения давления, 5) донная область.

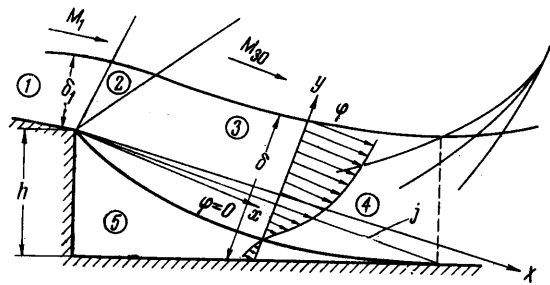
Величина донной энтальпии i_b считается известной, импульсом циркуляционного тока в донной области пренебрегается, рассматриваются только турбулентные режимы течения. Предполагается, что в донной области $p_b = \text{const}$, $i_b = \text{const}$, в зоне смешения $\partial p / \partial y = 0$, число Прандтля $P = 1$. Профили скоростей и энтальпии в зоне смешения вплоть до сечения прилипания описываются соотношениями [3,3]

$$\varphi = 0.5 (1 + \text{erf } \eta)$$

$$\varphi = \frac{i^* - i_b}{i_0^* - i_b}$$

(1)

$$\left(\eta = \sigma \frac{y}{x}, \quad \varphi = \frac{u}{u} \right)$$



Фиг. 1

Здесь u — скорость, i^* — энтальпия торможения, σ — эмпирический коэффициент, определяемый, в частности [3], соотношением $\sigma = 12 + 2.6 M$, где M — число Маха. Индекс 0 относится к параметрам на границе зоны смешения, примыкающей к изэнтропическому ядру потока (координата η_0 определяется из условия $\varphi_0 = 0.99$).

В зоне смешения введена ортогональная система координат x, y . Положение оси x относительно границы соответствующего невязкого потока (ось X), имеющего такие же M_1 и p_b / p_1 , характеризуется координатой η_m , определяемой в области 3 из уравнения импульса [3]

$$\eta_m = \eta_0 - (1 - c_{30}^2) J_{20}, \quad J_{20} = \int_{-\infty}^{\eta_0} \frac{\varphi^2 d\eta}{i_b^0 + \varphi (1 - i_b^0) - \varphi^2 c_{30}^2}$$

$$i_b^0 = \frac{i_b}{i_0^*}, \quad c = \frac{u}{u_{\max}} = \left[1 + \frac{2}{(\gamma - 1) M^2} \right]^{-1/2}$$

Здесь γ — отношение теплоемкостей. Нижние цифровые индексы означают, что рассматриваемые параметры, за исключением интегралов J , относятся к одной из указанных выше областей.

Если в зоне смешения ввести линию постоянных масс j , отделяющую массу набегающего потока от циркулирующей в донной области массы, то условие сохранения массы в донной области, позволяющее однозначно определить донное давление, имеет вид $p_j^* = p_*$. Полное давление p_j^* в области 3 равно

$$(p_j^* / p_b) = \{1 - \varphi_j^2 c_{30}^2 / [i_b^\circ + \varphi_j (1 - i_b^\circ)]\}^{-\gamma / (\gamma - 1)} \quad (2)$$

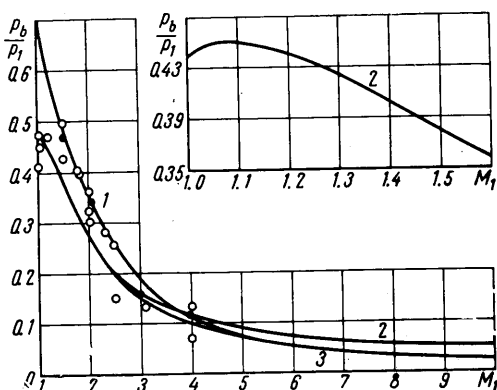
Координата линии постоянных масс η_j , необходимая для определения φ_j , находится в области 3 из совместного рассмотрения уравнений неразрывности и импульса [1,3]

$$J_{1j} = J_{10} - J_{20}$$

$$J_{1\alpha} = \int_{-\infty}^{\eta_\alpha} \frac{\varphi d\eta}{i_b^\circ + \varphi (1 - i_b^\circ) - \varphi^2 c_{30}^2} \quad (\alpha = j \text{ или } 0)$$

Предполагается для простоты, что $p_j^* = \text{const}$ в области 4. Следовательно, полное давление p_j^* в сечении прилипания устанавливается соотношением (2).

В области повышения давления можно считать, что его изменение происходит или изэнтропически, тогда применимо соотношение Прандтля-Майера или в косых скачках уплотнения, тогда применим метод касательных клиньев. Давление p_* определяется из предположения, что в сечении прилипания толщина возмущенной области δ достигает минимума. Последнее подтверждается физической картиной течения. Действительно, толщина δ , включающая зону смешения и донную область, уменьшается при приближении к сечению прилипания из-за уменьшения высоты донной области; за сечением прилипания толщина δ растет из-за турбулентного перемешивания. Если ввести коэффициент смешения k при помощи соотношения



Фиг. 2

Из соотношения (3) получается, что в области 3

$$k = (1 - c_{30}^2) (c_{pb} / c_{p0}) \cos \theta (J_{10} / \sigma)$$

Здесь c_p — средняя теплоемкость. Если для простоты расчета принять $k_* = k$, то из (4) находится θ_* . Соответствующее этому углу давление определяется или по соотношению Прандтля-Майера или по методу касательных клиньев.

Сравнение найденных значений p_j^* и p_* определяет искомую величину p_b .

Величины относительного донного давления p_b / p_1 , рассчитанные по изложенному методу при $\delta_1 = 0$, $i_b^\circ = 1$, $\gamma = 1.4$ (кривые 2 и 3 фиг. 2 получены соответственно при использовании соотношения Прандтля-Майера и метода касательных клиньев), лежат в основном ниже экспериментальных данных [7,8], полученных при $\delta_1 > 0$. Этот результат соответствует физической картине течения, так как меньшим значениям δ_1 должны соответствовать и меньшие значения p_b . Теория Корста, определяющая p_b также при $\delta_1 = 0$, дает завышенные результаты, в особенности при $M < 3$ (кривая 1 на фиг. 2). Последнее отмечалось и в работах [1,5].

$$\frac{dm}{dx} = k \frac{\rho_0 u_0}{\cos \theta} \left(m = \int_{y_j}^{u_0} \rho u dy \right) \quad (3)$$

то для границы зоны смешения [6]

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{k - \sin \theta}{\cos \theta}$$

Здесь ρ — плотность, θ — угол между вектором скорости и нижней стенкой.

Так как, по предположению, в сечении прилипания δ достигает минимума, то

$$\left(\frac{d\delta}{dx} \right)_* = 0, \sin \theta_* = k_* \quad (4)$$

индекс * относится к параметрам в сечении прилипания.

Результаты расчета показывают также, что при $M_1 < 1.1$ отношение p_b / p_1 несколько уменьшается с уменьшением M_1 в соответствии с экспериментом, в то время как теория Корста дает непрерывно увеличивающиеся значения p_b / p_1 .

Учет изменения k в области повышения давления приведет к уменьшению p_b / p_1 . Принятие $k_* = k$ в примере расчета приводит к занижению k_* приблизительно в полтора раза и к завышению p_b / p_1 на $\sim 10-15\%$.

Расчетные значения донного давления зависят от одного эмпирического коэффициента σ , по определению которого в настоящее время имеются различающиеся данные. Однако из-за слабого влияния σ на донное давление погрешности в определении этого коэффициента будут мало сказываться на конечных результатах. Расчет при $M_1 = 2$ для двух значений σ , отличающихся приблизительно в два раза, дал различие в величинах донного давления около 10% .

§ 2. Рассмотрим определение донного давления при ненулевой толщине начального пограничного слоя ($\delta_1 > 0$). Основные предположения и схема расчета остаются такими же, как и в предыдущем разделе.

Из-за отсутствия точных методов определение параметров пограничного слоя за веером волн разрежения производится приближенно. Считается, что непосредственно перед веером и за ним пограничный слой описывается степенным законом

$$\varphi_1 = \zeta_1^{1/n_1}, \quad \varphi_2 = \zeta_2^{1/n_2}, \quad \zeta_1 = y_1 / \delta_1, \quad \zeta = y / \delta_2$$

Предполагая, что масса пограничного слоя при прохождении веера волн разрежения сохраняется и что вдоль каждой линии тока полное давление остается постоянным [2], для определения показателя степени n_2 и толщины пограничного слоя δ_2 за веером получаются соотношения

$$\int_0^1 \frac{\beta^{n_2} d\beta}{i_w^\circ + \beta(1 - i_w^\circ) - \beta^2 c_{30}^2} = \frac{1 - \delta_1^* / \delta_1}{1 - c_{30}^2} \left(\frac{1 - c_{10}^2}{1 - c_{30}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{c_{10}^2}{c_{30}^2} \frac{p_b}{p_1} \frac{1}{n_1}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{n_1}{n_2} \frac{p_1}{p_b} \frac{c_{30}}{c_{10}} \quad \left(i_w^\circ = \frac{i_w}{i_0^*} \right)$$

Здесь i_w — энтальпия стенки, δ^* — толщина вытеснения. Профили скоростей и энтальпий вплоть до сечения прилипания описываются соотношениями [1,3]

$$\varphi = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta^*)] + \frac{\eta^{*-1/n_2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta - \eta^*}^{\eta} (\eta - \beta)^{1/n_2} e^{-\beta^2} d\beta \quad (5)$$

$$\frac{i^* - i_b}{i_0^* - i_b} = \varphi, \quad \eta = \eta^* \zeta$$

Для координаты η^* , характеризующей положение вдоль оси x , имеем [9]

$$\eta^* = \sigma \left[\psi^2 + \frac{4\sigma^2}{b} \frac{\varepsilon_0 (1 - e^{-b\psi})}{\delta_2 u_{30}} \frac{u_{30}}{u_0} \right]^{-1/2}$$

$$\left(\psi = \frac{x}{\delta_2}, \quad b = \operatorname{const} = 0.17 \right)$$

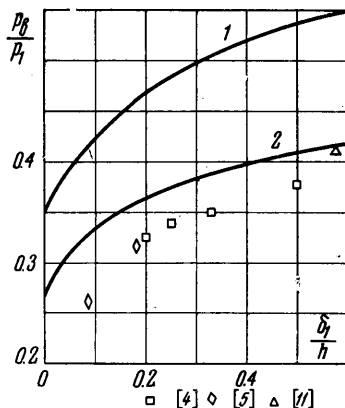
Можно показать, что если $\delta_1 \rightarrow 0$, то $\eta^* \rightarrow 0$. Коэффициент начальной кинематической турбулентной вязкости ε_0 можно представить в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\delta_2} \int_0^{\delta_2} \varepsilon dy \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon_0}{\delta_2 u_{30}} = \frac{0.16}{1 + 2n_2}$$

$$\left(\varepsilon = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad l = 0.4 y \right)$$

Здесь l — путь перемешивания. Донное давление определяется из сравнения p_j^* и p_* в конке области 3. Координата этого сечения устанавливается из равенства площадей прямого и обратного тока в донной области [10], которое для плоского потока записывается в виде $\eta_j - \eta_z = \eta_z - \eta_w$.

Координата линии нулевых скоростей на основе экспериментальных и расчетных данных принимается $\eta_z = -1.5$ [1,3,4]. Координата нижней стенки определя-



Фиг. 3

ются из геометрического соотношения

$$\eta_w = \eta_m - \eta^* \left(\frac{h/\delta_2}{\cos \theta} - \psi \operatorname{tg} \theta \right)$$

Из уравнений импульса и неразрывности определяются η_m и η_j

$$\eta_m = \eta_0 - \eta^* (1 - c_{30}^2) (k_2 \eta^* - J_{20}), \quad J_{1j} = (J_{10} - J_{20}) - (k_1 - k_2) \eta^*$$

Здесь

$$k_1 = n_2 \int_0^1 \frac{\beta^{n_2} d\beta}{i_w^\circ + \beta(1 - i_w^\circ) - \beta^2 c_{30}^2}, \quad k_2 = n_2 \int_0^1 \frac{\beta^{n_2+1} d\beta}{i_w^\circ + \beta(1 - i_w^\circ) - \beta^2 c_{30}^2}$$

Безразмерная скорость φ_j на линии постоянных масс и давление p_j^* определяются из (5) и (2). Давление p_* устанавливается при помощи (4), причем коэффициент смещения определяется из соотношения (3)

$$k = (1 - c_{30}^2) \cos \theta \eta^* \left(\frac{\psi}{\sigma^2} + 2 \frac{\varepsilon_0}{\delta_2 u_{30}} e^{-b\psi} \right) \left(J_{10} - \frac{\eta^* D_0}{1 - c_{30}^2} + \frac{\Phi_{10}}{n_2} \right)$$

$$D_0 = \frac{1}{n_2} \frac{I(\xi)}{1 - 2\eta^{*2} I(\xi) - 2\eta^* (\eta_0 - \eta^*) I(\xi)}$$

$$I(\xi) = \int_0^1 (1 - \xi)^{1/n_2} e^{-\alpha} d\xi, \quad \alpha = \xi^2 \eta^{*2} + 2\xi \eta^* (\eta_0 - \eta^*)$$

$$\Phi_{10} = \int_{-\infty}^{\eta_0} \frac{(i_b^\circ + \varphi^2 c_{30}^2) \{ \varphi - 0.5 [1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta^*)] \}}{[i_b^\circ + (1 - i_b^\circ) \varphi - \varphi^2 c_{30}^2]^2} d\eta$$

Здесь, как и ранее, принято, что в области $4 p_j^* = \operatorname{const}$ и $k_* = k$.

Результаты расчета p_b/p_1 (кривая 2 на фиг. 3), проведенного по изложенному методу при $M_1 = 2$, $i_b^\circ = 1$, $\gamma = 1.4$ и среднем значении $D_0 = 0.5$ (D_0 меняется от 0 до 1) для различных толщин начального пограничного слоя δ_1/h , удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными различных авторов, полученных при $M_1 = 2.025$ [4], $M_1 = 2$ [5] и $M_1 = 22.07$ [11].

Различие ($\sim 10\%$) объясняется, очевидно, предположением $k_* = k$. При использовании условия Корста результаты теоретического расчета приблизительно в полтора раза превышают экспериментальные данные (кривая 1, на фиг. 3).

Поступило 9 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагиров Р. К. Определение донного давления и донной температуры при внезапном расширении звукового или сверхзвукового потоков. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.
2. Бондарев Е. Н. Приближенная оценка влияния турбулентного пограничного слоя на донное давление. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 3.
3. K o r s t H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
4. S i r i e i x M. Pression de culot et processus de mélange turbulent en écoulement supersonique plan. Rech. Aéronaut., 1960, No. 78.
5. N a s h J. F. An analysis of two — dimensional turbulent base flow, including the effect of the approaching boundary layer. A.R.C.R.M., 1963, No. 3344.
6. C r o c c o L., L e e s L. A mixing theory for the interaction between dissipative flows and nearly isentropic streams. J. Ae. Sci., 1952, vol. 19, No. 10.
7. H o l d e r D. W., G a d d G. E. The interaction between shock waves and boundary layers and its relation to base pressure in supersonic flow. Boundary layer effects in aerodynamics. Proc. Symposium Held at the National Physical Laboratory, London, 1955.
8. N a s h J. F. A review of research on two—dimensional base flow. A.R.C.R.M., 1962, No. 3323.
9. Тагиров Р. К. Расчет теплоточков при обтекании уступа двумя разными сверхзвуковыми потоками. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
10. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
11. V a d r i n a g a y a n M. A. An experimental investigation of base flows at supersonic speeds. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1961, vol. 65, No. 607.