ГИДРОДИНАМИКА В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ *(Харьков)*

Ряд задач о малых колебаниях идеальной жидкости с учетом сил поверхностного натяжения рассмотрен в [1-3] (это, как правило, случаи, когда равновесная поверхность жидкости является сферической, плоской или слабо отличается от плоской). Ниже сформулирована задача о собственных частотах малых колебаний жидкости для общего случая равновесной поверхности жидкости в слабом потенциальном поле массовых сил. Показано, что собственные частоты и соответствующие собственные функции этой задачи могут быть найдены по методу Ритца.

Отметим, что аналогичные результаты в несколько иной постановке получены в недавно опубликованной работе [3].

1. Пусть идеальная и несжимаемая жидкость частично заполняет сосуд конечных размеров, занимая объем Ω, ограниченный твердой стенкой Σ_1 и свободной поверхностью S. Другую часть сосуда занимает газ.

Пусть ρ — плотность жидкости, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$—ее скорость, а $\Pi(x, y, z)$ — плотность потенциальной энергии массовых сил, (x, y, z) — декартовы координаты. Обозначим линию пересечения поверхностей Σ_1 и S через Γ, σ_1 — коэффициент поверхностного натяжения на границе Σ_1 твердое тело — жидкость, σ_2 — на границе Σ_2 твердое тело — газ, σ — на границе S жидкость — газ. Плотностью газа, находящегося над жидкостью, пренебрегаем.

Если жидкость находится в состоянии равновесия, то выполняются условия [2]

$$p_1 - p_0 = -\sigma(k_1 + k_2) \quad \text{на } S, \qquad \cos\gamma = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma} \quad \text{на } \Gamma \tag{1.1}$$

$$\rho\Pi = -p_1 + \text{const в } \Omega \tag{1.2}$$

Здесь k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности S, γ — угол смачивания, p_1 — давление в жидкости в равновесном состоянии, p_0 — давление в газе.

Будем рассматривать малые колебания жидкости около положения равновесия. В рамках линеаризованной теории достаточно ограничиться рассмотрением потенциального течения

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi \tag{1.3}$$

В объеме Ω выполняется уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.4}$$

а на стенке Σ_1 нормальная составляющая скорости исчезает

$$v_n = \partial\varphi / \partial n = 0 \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что $\Delta\varphi = 0$.

Отклонение свободной поверхности S' от равновесной поверхности S будем отсчитывать по нормали n к S. На поверхности S введем криволинейную систему координат (ξ, η). В приближении малых колебаний кинематическое условие на поверхности S выглядит следующим образом:

$$\partial N / \partial t = \partial\varphi / \partial n \tag{1.6}$$

Здесь $N(\xi, \eta, t)$ — величина отклонения свободной поверхности S' от равновесной поверхности S по нормали n к S, внешней по отношению к объему Ω.
Для потенциального движения имеет место интеграл Коши — Лагранжа

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2 + \rho\Pi + p = f(t) \tag{1.7}$$

Здесь $f(t)$ — произвольная функция времени, p — давление в жидкости. Используя (1.2) и пренебрегая членом $^1/_2\,\rho(\nabla\varphi)^2$, запишем равенство (1.7) для свободной поверхности S'

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \{p[\xi, \eta, N(\xi, \eta, t)] - p_1[\xi, \eta, N(\xi, \eta, t)]\} - f(t) = 0 \tag{1.8}$$

На свободной поверхности S' и контуре Γ' для любого момента времени должны выполняться условия [4], аналогичные (1.1):

$$p[\xi, \eta, N(\xi, \eta, t)] - p_0 = -\sigma(k_1' + k_2'), \qquad \cos\gamma' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma} \tag{1.9}$$

Здесь k_1' и k_2' — главные кривизны поверхности S', γ' — угол, под которым поверхность S' пересекает стенку Σ_1 сосуда.

Вычтем из равенств (1.9) равенства (1.1)

$$p\,[\xi, \eta, N(\xi, \eta, t)] - p_1(\xi, \eta, 0) = -\sigma\,[(k_1' + k_2') - (k_1 + k_2)] \tag{1.10}$$

$$\cos\gamma' - \cos\gamma = 0 \tag{1.11}$$

Так как поверхность S' мало отличается от равновесной поверхности S, то ([5, 6])

$$(k_1' + k_2') - (k_1 + k_2) = \Delta_s N + (k_1^2 + k_2^2) N \tag{1.12}$$

$$\cos\gamma' - \cos\gamma = (K\cos\gamma - K_1)\,N + \frac{\partial N}{\partial \nu}\sin\gamma \tag{1.13}$$

где Δ_s — второй дифференциальный параметр Лапласа — Бельтрами, K и K_1 — кривизны сечений плоскостью, перпендикулярной к линии Г, поверхностей S и Σ_1 соответственно; $\partial N / \partial \nu$ — производная от N по внешней нормали к линии Г на поверхности S; все величины, входящие в правую часть (1.13), вычислены на Г.

Подставим (1.12) в (1.10), а (1.10) — в (1.8). Линеаризуя полученное выражение, приходим к следующему условию на поверхности S:

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sigma\,[a(\xi, \eta)\,N - \Delta_s N] - f(t) = 0, \quad a(\xi, \eta) = -\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p_1}{\partial n} + k_1^2 + k_2^2\right) \tag{1.14}$$

Соотношения (1.11) и (1.13) приводят к краевому условию на контуре Г

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} - \mu(l)\,N = 0 \qquad \left(\mu(l) = \frac{K_1 - K\cos\gamma}{\sin\gamma}\right) \tag{1.15}$$

Можно показать, что для случая $\sin\gamma = 0$ соответствующее условие на Г имеет вид $N = 0$.

Из условия сохранения объема при колебаниях следует

$$\int_S N(\xi, \eta, t)\,dS = 0 \tag{1.16}$$

2. Рассмотрим на поверхности S вещественное гильбертово пространство функций $L_2(S)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_S uv\,dS \tag{2.1}$$

и соответствующей нормой. Тогда условие (1.16) означает, что искомая функция N принадлежит пространству H, являющемуся ортогональным дополнением к единице в $L_2(S)$.

Гармоническая в Ω функция φ, удовлетворяющая условию (1.5), может быть представлена в виде

$$\varphi = Gq, \qquad q = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_s \in H \tag{2.2}$$

При этом φ принадлежит [7] пространству С. Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$, а G — вполне непрерывный оператор в H.

След функции $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ на поверхности S, согласно теореме вложения С. Л. Соболева [7], принадлежит пространству $L_2(S)$. Оператор вложения вполне непрерывен в $W_2^1(\Omega)$, поэтому

$$\rho\varphi\,|_S = Aq \tag{2.3}$$

где A — результирующий вполне непрерывный в H самосопряженный положительный оператор. Самосопряженность оператора A следует из второй формулы Грина для гармонических функций, удовлетворяющих условию (1.5), а положительность — из неравенства

$$\rho\int_\Omega (\nabla\varphi)^2\,d\Omega = \rho\int_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = (Aq, q) \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Решение задачи Неймана (2.2) определяется с точностью до произвольной постоянной. Определим ее таким образом, чтобы

$$\int_S \varphi\,dS = 0 \qquad \text{или } \varphi\,|\,s \in H \tag{2.5}$$

Определим норму в $W_2^1(\Omega)$ по формуле

$$\|\varphi\|_1^2 = \rho \int_\Omega (\nabla\varphi)^2 d\Omega \tag{2.6}$$

С использованием условия (1.6) предыдущее равенство можно переписать для потенциала скорости φ в виде

$$\|\varphi\|_1^2 = \left(A \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial t}\right) = 2T \tag{2.7}$$

где T — величина кинетической энергии системы. Оператор A назовем оператором кинетической энергии [1].

Рассмотрим в пространстве H самосопряженный оператор B, заданный выражением

$$Bu = \sigma\left[au - \Delta_s u - \frac{1}{S}\int_S (au - \Delta_s u)\, dS\right] \tag{2.8}$$

и определенный на плотном в H множестве $D(B) = W_2^2(S)$ [7] функций, удовлетворяющих на Г условию (1.15). Самосопряженность оператора B в пространстве H следует из соответствующих формул Грина для функций, заданных на поверхности [8].

Если $N \in D(B)$ есть отклонение по нормали свободной поверхности S' от равновесной S, то

$$(BN, N) = \sigma \int_S [\nabla_s(N, N) + aN^2]\, dS - \sigma \oint_\Gamma \mu(l) N^2\, dl \tag{2.9}$$

$\nabla_s(N, N)$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами [8]. Правая часть в (2.9) есть вторая вариация потенциальной энергии системы в положении равновесия [6], т. е. представляет удвоенную потенциальную энергию малых колебаний жидкости. Оператор B называется оператором потенциальной энергии.

Будем рассматривать тот случай, когда в положении равновесия системы потенциальная энергия системы имеет минимум, т. е. положение равновесия статически устойчиво. Это означает, что оператор B положительно определен

$$(BN, N) \geqslant \alpha^2 \|N\|^2 \tag{2.10}$$

Для элементов из $D(B)$ введем новое скалярное произведение

$$(u, v)_B = (Bu, v) \tag{2.11}$$

Пополнение $D(B)$ по норме $\|u\|_B = [(u, u)_B]^{1/2}$ образует энергетическое пространство H_B. Можно показать, что при некоторых ограничениях на функции $a(\xi, \eta)$ и $\mu(e)$ нормы в пространствах H_B и $W_2^1(S)$ эквивалентны

$$\beta_1 \leqslant \frac{\|u\|_B}{\|u\|_{W_2^1(S)}} \leqslant \beta_2 \tag{2.12}$$

Из (2.10) и (2.12) следует, что B^{-1} существует и вполне непрерывен в H [9].

Выберем $f(t)$ в уравнении (1.14) так, чтобы

$$\sigma(aN - \Delta_s N) - f(t) \equiv BN$$

Очевидно,

$$f(t) = \frac{\sigma}{S}\int_S (aN - \Delta_s N)\, dS$$

Первое слагаемое в (1 14) может быть преобразовано с использованием (1.6) и (2.3) к виду

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = AN_{tt} \qquad \left(N_{tt} = \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}\right)$$

---

[1] Здесь и далее для операторов и пространств применяется терминология С. Г. Михлина [9].

Задача о малых колебаниях идеальной жидкости приведена к операторному уравнению в пространстве H:

$$AN_{tt} + BN = 0 \tag{2.13}$$

где A и B — операторы кинетической и потенциальной энергии соответственно.

Замечание 1. Уравнение (2.13) можно обобщить на случай, когда свободная поверхность жидкости состоит из m отдельных частей. Уравнение рассматривается в пространстве H, являющемся ортогональным дополнением к «вектор-единице» пространства $L_2(S) = \{L_2(S_1), \ldots, L_2(S_m)\}$. Величины A и B — операторы в H с вышеописанными свойствами.

Замечание 2. Неравенства (2.12) можно получить для положительно определенного оператора B, если, во-первых, $|a(\xi, \eta)| \leqslant F = \text{const}$; во-вторых, существует на $S + \Gamma$ достаточно гладкая функция $\psi(\xi, \eta)$ такая, что:

$$\mu(l) \leqslant \partial\psi/\partial\nu \quad \text{на } \Gamma, \qquad |\Delta_s\psi| \leqslant d = \text{const}; \quad \nabla_s(\psi, \psi) \leqslant d^2 \text{ на } S$$

3. Будем искать решение уравнения (2.13) в виде $N = u(\xi, \eta) \exp i\omega t$. Тогда (2.13) приводит к уравнению

$$Au = \frac{1}{\omega^2} Bu \tag{3.1}$$

Рассмотрим оператор $C = B^{-1}A$. Он вполне непрерывен в пространствах H и H_B, а в H_B является самосопряженным

$$(Cu, v)_B = (BB^{-1}Au, v) = (u, Av) = (u, BB^{-1}Av) = (Bu, B^{-1}Av) = (u, Cv)_B \tag{3.2}$$

Для оператора C имеем следующую задачу на собственные значения:

$$Cu = \omega^{-2}u \tag{3.3}$$

Отсюда следует [9], что:

а) собственные функции задачи (3.3) образуют полную систему в пространствах H и H_B, собственные элементы ортогональны в H_B;

б) все собственные числа ω_k^{-2} положительны, т. е. собственные частоты действительны, и $\omega_k^2 \to \infty$ при $k \to \infty$;

в) собственные элементы и собственные частоты могут быть получены по методу Ритца, который сходится.

Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы, представляющейся аналогом теоремы Лагранжа об устойчивости механической системы:

Для устойчивости равновесного состояния системы необходимо, чтобы квадратичный функционал (BN, N) был неотрицательным, и достаточно, чтобы он был положительно определенным.

Автор благодарит А. Д. Мышкиса и А. Д. Тюпцова за ряд полезных советов.

Поступило 3 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
3. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, стр. 746—753.
5. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. ОНТИ, 1935.
6. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика жидкостей и газов, 1966, № 2.
7. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа к математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
8. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. Физматгиз, 1963.
9. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.