Начальный контур — окружность, очевидно, не может изменяться со временем; это следует и из решения (6), если в нем положить $n = 1$. При помощи новых переменных $u$ и $\nu$ можно преобразовать начальное условие (2) так, чтобы в нем отсутствовали первые гармоники.

Жидкость предполагается несжимаемой, поэтому при движении пятна площадь его должна оставаться неизменной. Из (6) видно, что это условие выполняется

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1 + g(\theta, t)]^2 \, d\theta = \pi$$

В качестве примера рассмотрим стягивание пятна при начальном условии вида

$$f(\theta, 0) = 1 + 0.1\cos 2\theta$$

На фиг. 2, *а* приведены зависимости $y = Rg(\theta, \tau)$ от времени $\tau$ для ряда значений $\theta$. Исходные данные взяты из работы [4]; фиг. 2, *а*, соответствует величинам $R = 7.04$ *см*, $h = 0.137$ *см*, $\mu_1 = 2.7$ *пз*, $\mu_2 = 0$, $\sigma = 33.5$ *дин/см*; фиг. 2, *б*,— величинам $R = 7.04$ *см*, $h = 0.133$ *см*, $\mu_1 = 2.1$ *пз*, $\mu_2 = 1$ *пз*, $\sigma = 8.4$ *дин/см*.

Поступило 1 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л. О движении границы раздела вязких жидкостей в узкой щели. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2.
2. Скворцов Э. В. Приближенное аналитическое решение некоторых задач о стягивании контура нефтеносности. Сб. «Теоретические и экспериментальные исследования разработки нефтяных месторождений», Казань, 1964.
3. Данилов В. Л. Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Данилов В. Л., Теплов Ю. А. О моделировании стягивания контура нефтеносности на щелевом лотке. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, № 15.

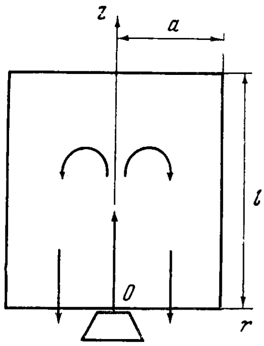
---

# ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ В ТУПИК

В. А. ЧЕРНЫХ (*Москва*)

В настоящее время в нефтяной и газовой промышленности все большее значение приобретают методы разрушения горных пород при помощи затопленной гидравлической струи. В частности, к таким методам относятся различные виды бурения и такой перспективный метод интенсификации добычи нефти и газа, как пескоструйная перфорация.

Очевидно, что для научного обоснования и разработки этих методов первостепенное значение имеют вопросы гидравлики осесимметричной струи, истекающей в тупик. В настоящее время, как указывается в работах [1, 2], эти вопросы решаются для идеальной жидкости путем переноса закономерностей плоско-параллельного истечения на осесимметричное, причем считается, что длина тупика во много раз больше его диаметра.




В настоящей статье получено точное решение задачи об осесимметричном истечении струи идеальной жидкости в цилиндрический тупик с произвольным отношением длины к диаметру.

Как известно, поле скоростей идеальной жидкости имеет свой потенциал, который должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Здесь $U$ — потенциал скоростей.

Для получения решения необходимо удовлетворить уравнению (1) и следующим граничным условиям задачи:

$$\partial U / \partial z = 0 \quad \text{при } z = l, \qquad \partial U / \partial r = 0 \quad \text{при } r = a, \quad \partial U / \partial z = f(r) \quad \text{при } z = 0$$

Здесь $\partial U / \partial r$, $\partial U / \partial z$ — радиальная и осевая составляющие вектора скорости соответственно, $l$ — длина тупика, $a$ — радиус тупика (см. фигуру).

Применяя метод разделения переменных, получаем общее решение задачи в следующем виде:

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left[\exp\left(\frac{\lambda_m}{a}(z-2l)\right) + \exp\left(-\frac{\lambda_m}{a}z\right)\right] J_0\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) \tag{2}$$

Здесь $\lambda_m$ — положительные корни уравнения $J_1(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания; $c_m$ — произвольные постоянные, подлежащие доопределению; $J_0(\lambda_m r/a)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

Нетрудно видеть, что первое и второе граничные условия удовлетворительны. При этом оказывается, что

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\lambda_m}{a}\left[\left(\exp - \frac{2\lambda_m l}{a}\right) - 1\right] J_0\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) \tag{3}$$

Для удовлетворения третьему граничному условию путем соответствующего определения коэффициентов $c_m$ необходимо представить функцию $f(r)$ в виде ряда Фурье — Бесселя, что оказывается возможным ввиду того, что функция $f(r)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Дини [3]

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0(\lambda_m x)}{[J_0(\lambda_m)^2]} \int_0^1 x f(ax) J_0(\lambda_m x)\, dx, \qquad x = \frac{r}{a} \tag{4}$$

Из сравнения (3) и (4) видно, что для удовлетворения третьего граничного условия необходимо, чтобы коэффициенты $c_m$ были определены следующим образом:

$$c_m = \frac{2a}{\lambda_m[\exp(-2\lambda_m l/a) - 1][J_0(\lambda_m)]^2} \int_0^1 x f(ax) J_0(\lambda_m x)\, dx \tag{5}$$

Таким образом, полученное решение удовлетворяет уравнению (1) и всем граничным условиям.

Выражения для осевой и радиальной составляющих скорости имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\lambda_m}{a}\left[\exp\left(\frac{\lambda_m}{a}(z-2l)\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_m}{a}z\right)\right] J_0(\lambda_m x) \tag{6}$$

$$\left(x = \frac{r}{a}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\lambda_m}{a}\left[\exp\left(\frac{\lambda_m}{a}(z-2l)\right) + \exp\left(-\frac{\lambda_m}{a}z\right)\right] J_1(\lambda_m x) \tag{7}$$

Здесь $\lambda_m$ — положительные корни уравнения $J_1(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, оказывается возможным точный гидравлический расчет осесимметричной струи, истекающей в тупик, поскольку функция $f(r)$, описывающая эпюру скоростей в сечении $z = 0$, является в большинстве случаев известной с достаточной степенью точности.

Поступило 22 X 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Изд-во АН СССР, 1961.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. 1960.
3. Батсон Г. Н. Теория бесселевых функций. 1949.