РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТЯГИВАНИИ БЛИЗКОГО К КРУГОВОМУ ПЯТНА ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕЖФАЗНОГО НАТЯЖЕНИЯ

В. Л. ДАНИЛОВ, Э. В. СКВОРЦОВ

(Москва, Казань)

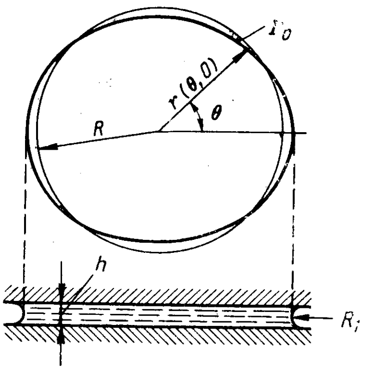
Найдено решение задачи о стягивании некругового пятна жидкости в узкой щели к кругу под действием межфазного натяжения с учетом различия вязкостей жидкости пятна и окружающей его среды при условии малого отличия первоначальной формы контура от окружности.

Рассматривается плоское течение системы двух вязких несмешивающихся и несжимаемых жидкостей в узкой щели между параллельными пластинами. Известная в начальный момент поверхность раздела жидкостей характеризуется средним сечением, параллельным стенкам щели,— замкнутым контуром Γ_0 (фиг. 1).

Обозначим динамические вязкости жидкостей во внутренней области G_1 и во внешней неограниченной области G_2 соответственно через μ_1 и μ_2, межфазное натяжение на контакте жидкостей—через σ. Высота щели h и радиус кривизны R_1 считаются постоянными.

Пусть $r(\theta, \tau)$ — расстояние от начала полярной системы координат до точки контура. Введем безразмерные время и полярный радиус

$$t = \tau \frac{\sigma h}{12(\mu_1 + \mu_2)\pi R^2}, \qquad f = \frac{r}{R}$$



Фиг. 1

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение стягивания контура Г под действием межфазного натяжения [1] имеет вид

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_t(\nu, t) K(\theta, \nu, t)\, d\nu + \frac{h}{R}\int_0^{2\pi} \delta(\nu, t) L(\theta, \nu, t)\, d\nu = 0 \quad (1)$$

Здесь

$$f_t(\theta, t) = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial t}, \qquad f_\theta(\theta, t) = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta}, \qquad \lambda = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$K(\theta, \nu, t) = \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t)\cos(\theta - \nu) - f_\theta(\theta, t) f(\nu, t)\sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t)\cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)}$$

$$\delta(\nu, t) = \frac{\partial}{\partial \nu}\left\{\frac{f^2(\nu, t) + 2f_\nu^2(\nu, t) - f(\nu, t) f_{\nu\nu}(\nu, t)}{[f^2(\nu, t) + f_\nu^2(\nu, t)]^{3/2}}\right\}$$

$$L(\theta, \nu, t) = \frac{f_\theta(\theta, t) f(\theta, t) - f_\theta(\theta, t) f(\nu, t)\cos(\theta - \nu) + f(\theta, t) f(\nu, t)\sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t)\cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)}$$

Пусть начальное условие для уравнения (1) имеет вид

$$f(\theta, 0) = 1 + g(\theta, 0), \qquad g(\theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad (2)$$

Здесь $g(\theta, 0)$ — величина первого порядка малости по сравнению с единицей, что соответствует начальному контуру Γ_0, близкому к окружности единичного радиуса.

Будем искать решение уравнения (1) с начальным условием (2) в виде

$$f(\theta, t) = 1 + g(\theta, t)$$

Здесь и далее предполагается, что $g(\theta, t)$, $g_\theta(\theta, t)$, $g_{\theta\theta}(\theta, t)$ и $g_t(\theta, t)$ — величины первого порядка малости. Пренебрегая величинами более высоких порядков, получим

$$f^2(\theta, t) = 1 + 2g(\theta, t), \quad f(\theta, t) f_t(\theta, t) = g_t(\theta, t)$$
$$f(\theta, t) f(\nu, t) = 1 + g(\theta, t) + g(\nu, t) \quad (3)$$

Подстановка соотношений (3) в (1) приводит к уравнению

$$g_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_t(\nu, t)\, d\nu -$$

$$-\frac{h}{2R}\int_0^{2\pi}\left\{[g_\nu(\nu, t) + g_{\nu\nu\nu}(\nu, t)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-\nu}{2} + g_\theta(\theta, t)\, g_{\nu\nu\nu}(\nu, t)\right\} d\nu = 0 \qquad (4)$$

Начальное условие

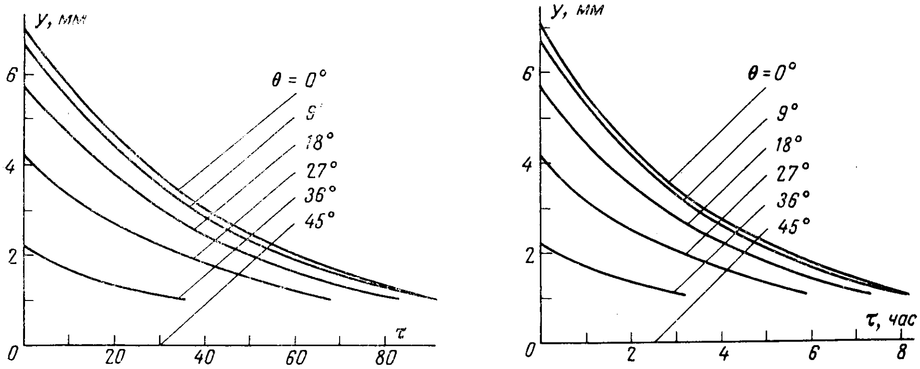
$$g(\theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \qquad (5)$$

Второй интеграл в (4) понимается в смысле главного значения.

Уравнение (4) с начальным условием (5) имеет следующее решение:

$$g(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\exp\left[-\frac{\pi h n(n^2-1)}{R}t\right] \qquad (6)$$

В этом нетрудно убедиться, подставив (6) в (4). Выражение (6) было найдено



а *б*

Фиг. 2

методом индукции из анализа структуры нескольких первых членов разложения $f(\theta, t)$ в ряд по t (см. работу [2]) путем, описанным в статье [3].

Найдем скорость перемещения границы Г

$$g_t(\theta, t) = -\frac{\pi h}{R}\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2-1)(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\exp\left[-\frac{\pi h n(n^2-1)}{R}t\right] \qquad (7)$$

Дифференцированием (6) по θ можно убедиться, что для выполнения динамического условия о малости $g_t(\theta, t)$, которое было принято выше, достаточно условия гладкости Γ_0 — малости величины $g_{\theta\theta\theta\theta}(\theta, 0)$.

В начальном условии (2) положим $n = 1$;

$$f(\theta, 0) = 1 + \alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta$$

Из общей теории рядов Фурье известно, что

$$|\alpha_n| < |g(\theta, 0)|, \qquad |\beta_n| < |g(\theta, 0)|,$$

т. е. α_1 и β_1 — величины по крайней мере первого порядка малости. Будем далее пренебрегать величинами второго порядка. Введем новые переменные $u(\nu, 0)$, ν по формулам

$$f\cos\theta = u\cos\nu + \alpha_1, \qquad f\sin\theta = u\sin\nu + \beta_1$$

Тогда

$$f = u + \alpha_1\cos\nu + \beta_1\sin\nu, \quad \cos\theta = \cos\nu, \quad \sin\theta = \sin\nu$$

Это после подстановки в (8) дает уравнение единичной окружности $u(\nu, 0) = 1$ с центром в точке с координатами

$$f_0 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \qquad \theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

Начальный контур — окружность, очевидно, не может изменяться со временем; это следует и из решения (6), если в нем положить $n = 1$. При помощи новых переменных u и ν можно преобразовать начальное условие (2) так, чтобы в нем отсутствовали первые гармоники.

Жидкость предполагается несжимаемой, поэтому при движении пятна площадь его должна оставаться неизменной. Из (6) видно, что это условие выполняется

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1 + g(\theta,t)]^2 \, d\theta = \pi$$

В качестве примера рассмотрим стягивание пятна при начальном условии вида

$$f(\theta, 0) = 1 + 0.1\cos 2\theta$$

На фиг. 2,*а* приведены зависимости $y = Rg(\theta, \tau)$ от времени τ для ряда значений θ. Исходные данные взяты из работы [4]; фиг. 2,*а*, соответствует величинам $R = 7.04$ *см*, $h = 0.137$ *см*, $\mu_1 = 2.7$ *пз*, $\mu_2 = 0$, $\sigma = 33.5$ *дин/см*; фиг. 2, *б*,— величинам $R = 7.04$ *см*, $h = 0.133$ *см*, $\mu_1 = 2.1$ *пз*, $\mu_2 = 1$ *пз*, $\sigma = 8.4$ *дин/см*.

Поступило 1 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

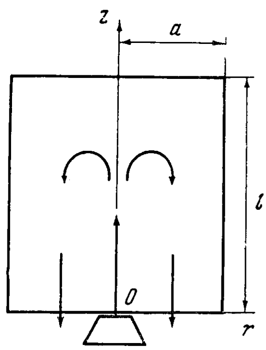
1. Данилов В. Л. О движении границы раздела вязких жидкостей в узкой щели. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2.
2. Скворцов Э. В. Приближенное аналитическое решение некоторых задач о стягивании контура нефтеносности. Сб. «Теоретические и экспериментальные исследования разработки нефтяных месторождений», Казань, 1964.
3. Данилов В. Л. Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Данилов В. Л., Теплов Ю. А. О моделировании стягивания контура нефтеносности на щелевом лотке. Изв. Казанск. филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, № 15.

ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ В ТУПИК

В. А. ЧЕРНЫХ (*Москва*)

В настоящее время в нефтяной и газовой промышленности все большее значение приобретают методы разрушения горных пород при помощи затопленной гидравлической струи. В частности, к таким методам относятся различные виды бурения и такой перспективный метод интенсификации добычи нефти и газа, как пескоструйная перфорация.

Очевидно, что для научного обоснования и разработки этих методов первостепенное значение имеют вопросы гидравлики осесимметричной струи, истекающей в тупик. В настоящее время, как указывается в работах [1, 2], эти вопросы решаются для идеальной жидкости путем переноса закономерностей плоско-параллельного истечения на осесимметричное, причем считается, что длина тупика во много раз больше его диаметра.



В настоящей статье получено точное решение задачи об осесимметричном истечении струи идеальной жидкости в цилиндрический тупик с произвольным отношением длины к диаметру.

Как известно, поле скоростей идеальной жидкости имеет свой потенциал, который должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Здесь U — потенциал скоростей.

Для получения решения необходимо удовлетворить уравнению (1) и следующим граничным условиям задачи:

$$\partial U / \partial z = 0 \quad \text{при } z = l, \qquad \partial U / \partial r = 0 \quad \text{при } r = a, \ \partial U / \partial z = f(r) \quad \text{при } z = 0$$