# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЖНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

**Н. П. БЕЛИК, В. А. МАХИН, В. Ф. ПРИСНЯКОВ**

*(Днепропетровск)*

Неустановившиеся движение жидкости и газа по трубопроводам сопровождается периодическими возмущениями расхода и давления. Поэтому определенный практический и теоретический интерес представляет исследование резонансных явлений и методов их устранения или использования. Как известно, важным параметром, характеризующим динамические свойства системы, является собственная частота колебаний жидкости. Знание этой величины упрощает решение других, более общих задач неустановившегося движения жидкости в трубопроводных коммуникациях (например, о периодических волновых процессах, о гидроударе и т. п.). В известной литературе [1, 2] рассмотрены некоторые частные случаи определения собственных частот колебаний жидкости в простейших пневмогидросистемах, обобщенные в определенной степени в [3]. Ниже определяются в более общей постановке собственные частоты колебаний жидкости в сложных разветвленных системах и анализируется влияние упругих элементов в концевых сечениях магистрали на их величину.

**1. Исходные уравнения.** Разобьем сложную гидравлическую систему на $n$ простых трубопроводов с однородной жидкостью, имеющих постоянную по длине упругую характеристику. Тогда волновой процесс в системе будет описываться уравнениями [3]:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \tau^2} + 2a\frac{\partial G_1}{\partial \tau} = c_1^2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2}, \ldots, \quad \frac{\partial^2 G_n}{\partial \tau^2} + 2a\frac{\partial G_n}{\partial \tau} = c_n^2\frac{\partial^2 G_n}{\partial x_n^2} \tag{1.1}$$

Здесь $G$ — массовый секундный расход жидкости; $a$ — декремент затухания волнового процесса; $c$ — скорость распространения упругой волны в жидкости, наполняющей трубопровод, $x$ — координата вдоль оси трубопровода, отсчитываемая от его начала; $\tau$ — время.

Для рассматриваемого случая свободных колебаний жидкости граничные условия будут однородными и частное решение системы (1.1) можно искать методом Фурье [4]

$$G_m(x_m, \tau) = X(x)\, T(\tau) \tag{1.2}$$

Тогда общее решение после преобразований можно привести к виду

$$\begin{gathered} G_1(x_1, \tau) = \exp(-a\tau)\sum_{k=1}^{\infty} A_{1k}\sin\left(\frac{\omega_k x_1}{c_1} + \varphi_{1k}\right)\sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a^2}\,\tau + \psi_k\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_n(x_n, \tau) = \exp(-a\tau)\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\sin\left(\frac{\omega_k x_n}{c_n} + \varphi_{nk}\right)\sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a^2}\,\tau + \psi_k\right) \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $A_k$, $\varphi_k$, $\psi_k$ — произвольные постоянные, определяемые начальными и граничными условиями, $\omega_k$ — собственные числа задачи. Из уравнений (1.3) следует, что собственная частота колебаний жидкости в $j$-м трубопроводе равна

$$\xi_k = \sqrt{\omega_k^2 - a^2}$$

При отсутствии трения ($a_j = 0$) получаем собственные числа задачи, представляющие собой собственную частоту колебаний жидкости в сложном трубопроводе, т. е. $\xi_k = \omega_k$. Поэтому при определении $\xi_k$ основные трудности связаны с нахождением $\omega_k$. Естественно, что $\omega_k$ можно было бы определить, положив $a = 0$ в исходных уравнениях (1.3). Ниже будет показано, что в этом нет необходимости, за исключением некоторых частных случаев.

**2. Определение собственной частоты колебаний жидкости в последовательно соединенных трубопроводах.** Рассмотрим многоступенчатый трубопровод, состоящий из $n$ простых. На стыке двух простых, скажем $(j-1)$-го и $j$-го, когда влияние потери статического давления незначительно, справедливо условие равенства массовых расходов и давлений, т. е.

$$G_{j-1}(l_{j-1}, \tau) = G_j(0, \tau) \tag{2.1}$$

$$p_{j-1}(l_{j-1}, \tau) = p_j(0, \tau) \tag{2.2}$$

где $l_j$ — длина $j$-го трубопровода.

Уравнение неразрывности можно записать следующим образом:

$$-\frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{c^2}{F} \frac{\partial G(x, \tau)}{\partial x} \tag{2.3}$$

Дифференцируя общее решение (1.3) по $x$, получаем уравнение неразрывности в виде

$$-\frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{c}{F} \exp(-a\tau) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_k \cos\left(\frac{\omega_k x}{c} + \varphi_k\right) \sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a^2}\,\tau + \psi_k\right) \tag{2.4}$$

С учетом полученной зависимости (2.4) и выражения (1.3) условия (2.1) и (2.2) будут иметь вид

$$A_{(j-1)k} \sin\left(\frac{\omega_k l_{j-1}}{c_{j-1}} + \varphi_{(j1)k}\right) \sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a_{j1}^2}\;\tau + \psi_{j1)k}\right) e^{-a_{j1}\tau} =$$

$$= A_{jk} \sin \varphi_{jk} \sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a_j^2}\,\tau + \psi_k\right) \exp(-a\tau) \tag{2.5}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_{(j-1)k} \cos\left(\frac{\omega_k l_{j-1}}{c_{j-1}} + \varphi_{(j-1)k}\right) \sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a_{j1}^2}\,\tau + \psi_{(j1)k}\right) \frac{c_{j-1}}{F_{j-1}} \exp(-a_{(j1)}\tau) =$$

$$= A_{jk} \cos \varphi_{jk} \sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - a^2}\,\tau + \psi_{jk}\right) \frac{c_j}{F_j} \exp(-a\tau) \tag{2.6}$$

Разделив (2.5) на (2.6), получаем

$$\frac{F_1}{c_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_k l_1}{c_1} + \varphi_{1k}\right) - \frac{F_2}{c_2} \operatorname{tg} \varphi_{2k} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{F_{j-1}}{c_{j-1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_k l_{j-1}}{c_{j-1}} + \varphi_{(j-1)k}\right) - \frac{F_j}{c_j} \operatorname{tg} \varphi_{jk} = 0 \tag{2.7}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{F_{n-1}}{c_{n-1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_k l_{n-1}}{c_{n-1}} + \varphi_{(n-1)k}\right) - \frac{F_n}{c_n} \operatorname{tg} \varphi_{nk} = 0$$

Величины фазовых углов $\varphi_{1k}$ и $\varphi_{nk}$ определяются из граничных условий, что замыкает полученную систему уравнений. Естественно, ее можно путем последовательного исключения $\varphi_{2k}, \varphi_{jk}, \ldots, \varphi_{(n-1)k}$ свести к одному уравнению с неизвестной величиной $\omega_k$. Но практически в этом нет надобности, так как, с одной стороны, запись в виде (2.7) значительно упрощает программирование на электронно-вычислительных машинах или же вычисление вручную, а с другой — необходимо так или иначе находить при определении формы колебаний все фазовые углы $\varphi_k$. Кроме того, получаемое уравнение в развернутом виде довольно громоздко.

Определим значения фазовых углов при различных граничных условиях.

1. В сечении $x_1 = 0$. а) Трубопровод закрыт. Тогда $G_1(0, \tau) = 0$, и из уравнения (1.3) имеем

$$\varphi_{1k} = (k-1)\pi \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.8}$$

б) Трубопровод открыт. Тогда $p_1(0, \tau) = \text{const}$, $\partial G_1(0, \tau) / \partial x_1 = 0$, и поэтому имеем

$$\varphi_{1k} = {}^1/_2 (2k-1)\pi \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.9}$$

2. В сечении $x_n = l_n$ для закрытого и открытого трубопроводов соответственно

$$\varphi_{nk} = (k-1)\pi - \frac{\omega_k l_n}{c_n}, \qquad \varphi_{nk} = \frac{2k-1}{2}\pi - \frac{\omega_k l_n}{c_n} \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай, когда в концевых сечениях трубопровода имеются упругие инерционные элементы, масса подвижных частей которых $M$, а жесткость $h$. Тогда уравнение движения элемента около своего состояния равновесия запишется в виде

$$M\delta x^{\cdot\cdot} + h\delta x = S\delta p \tag{2.11}$$

где $\delta p$ — отклонение давления от стационарного, $\delta x$ — перемещение подвижных частей около состояния равновесия, $S$ — рабочая площадь упругого элемента.

Определим величины $\delta p$, $\delta x$, $\delta x^{\cdot\cdot}$(при $a = 0$). Для этого сначала, учитывая, что $\partial p / \partial \tau = \partial \delta p / \partial \tau$, проинтегрируем уравнение (2.4)

$$\delta p\,(x,\tau) = \frac{c}{F} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{\omega_k x}{c} + \varphi_k\right) \cos(\omega_k \tau + \psi_k) \qquad (2.12)$$

Предположим, что плотность $\rho$ изменяется незначительно, что справедливо в достаточной мере для капельной жидкости, а также для газа в случае, если амплитуда колебаний давления намного меньше среднего давления в трубопроводе. Тогда при помощи выражения (1.3) легко найти отклонение скорости $\delta w\,(x, \tau)$

$$\delta w\,(x,\tau) = \delta x^{\cdot} = \frac{1}{\rho F} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{\omega_k x}{c} + \varphi_k\right) \sin(\omega_k \tau + \psi_k) \qquad (2.13)$$

ее производную $\partial \delta w / \partial \tau = \delta x^{\cdot\cdot}$

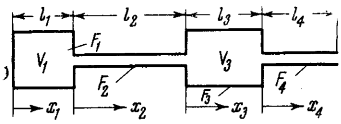
$$\frac{\partial \delta w}{\partial \tau} = \delta x^{\cdot\cdot} = \frac{1}{\rho F} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_k \sin\left(\frac{\omega_k x}{c} + \varphi_k\right) \cos(\omega_k \tau + \psi_k) \qquad (2.14)$$

и перемещение жидкости в произвольном сечении

$$\delta x = \int_0^{\tau} \delta w\,(x,\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\rho F} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\omega_k} \sin\left(\frac{\omega_k x}{c} + \varphi_k\right) \cos(\omega_k \tau + \psi_k) \qquad (2.15)$$

Полагаем, что скорости движения и перемещение жидкости и упругого элемента в общем сечении равны. Тогда, если упругий элемент расположен в сечении $x_j = l_j$, после подстановки полученных выражений (2.12), (2.14) и (2.15) в (2.11) получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_k l_j}{c_j} + \varphi_{jk}\right) = \frac{c_j \rho_j S}{\omega_k (M - h / \omega_k^2)} \qquad (2.16)$$




Если упругий элемент расположен в сечении $x_1 = 0$, то

$$\operatorname{tg}\varphi_{1k} = \frac{c_1 \rho_1 S}{\omega_k (M - h / \omega_k^2)} \qquad (2.17)$$

Уравнениям (2.16) и (2.17) можно придать вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_k l_j}{c_j} + \varphi_{jk}\right) = \frac{c_j \rho_j S}{\omega_k M (1 - \lambda^2/\omega_k^2)}, \quad \operatorname{tg}\varphi_{1k} = \frac{c_j \rho_j S}{\omega_k M (1 - \lambda^2 / \omega_k^2)} \qquad (2.18)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{h / M}$ — собственная частота колебаний упругого элемента.

Из полученных уравнений следует, что наличие упругих элементов в концевых сечениях существенно влияет на собственную частоту колебаний жидкости в пневмогидросистеме. Итак, собственная частота колебаний жидкости или газа в последовательно соединенных трубопроводах определяется системой уравнений (2.7), где фазовые углы $\varphi_{1k}$ и $\psi_{jk}$ зависят от граничных условий и находятся по формулам (2.8) — (2.10) и (2.18).

В заключение покажем, что формула И. А. Чарного [3] для собственной частоты системы, изображенной на фигуре, вытекает из (2.7) как частный случай. В самом деле, при предложениях, заложенных в [3] (т. е. что $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$), собственная частота газа в таком трубопроводе определяется тремя уравнениями системы (2.7). При этом

$$\varphi_1 = (k-1)\pi; \qquad \varphi_4 = {}^1/_2\,(2k-1)\pi - \frac{\omega_k l_4}{c}$$

и расчетные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} F_1 \operatorname{tg}\frac{\omega l_1}{c} - F_2 \operatorname{tg}\varphi_2 &= 0 \\ F_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega l_2}{c} + \varphi_2\right) - F_3 \operatorname{tg}\varphi_3 &= 0 \\ F_3 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega l_3}{c} + \varphi_3\right) - F_4 \operatorname{ctg}\frac{\omega l_4}{c} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Из первых двух уравнений этой системы имеем

$$F_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \left[F_2 \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c} + F_1 \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c}\right]\left[1 - \frac{F_1}{F_2} \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c}\right]^{-1} \tag{2.20}$$

Из третьего уравнения получаем

$$F_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \left[F_4 \operatorname{ctg} \frac{\omega l_4}{c} - F_3 \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c}\right]\left[1 + \frac{F_4}{F_3} \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c} \operatorname{ctg} \frac{\omega l_4}{c}\right]^{-1} \tag{2.21}$$

Проанализируем уравнения (2.20) и (2.21). Емкости $V_1$ и $V_3$ можно представить как трубопроводы малой длины и большого диаметра. В этом случае $l_1 \to 0$, $l_3 \to 0$, $F_1 \to \infty$, $F_3 \to \infty$, но $l_1F_1 = V_1$; $l_3F_3 = V_3$. Тогда

$$\frac{1}{F_3} \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c} = 0, \qquad F_1 \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c} = \frac{V_1\omega}{c}, \qquad F_3 \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c} = \frac{V_3\omega}{c}$$

и уравнения (2.20) и (2.21) принимают вид

$$F_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \left[F_2 \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c} + \frac{V_1\omega}{c}\right]\left[1 - \frac{V_1}{cF_2} \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c}\right]^{-1} \tag{2.22}$$

$$F_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = F_4 \operatorname{ctg} \frac{\omega l_4}{c} - \frac{V_3\omega}{c} \tag{2.23}$$

Приравнивая (2.22) и (2.23), после преобразований получаем формулу И. А. Чарного [3]

$$\frac{V_1\omega}{cF_2}\left(\frac{F_2}{F_4}\cos\frac{\omega l_2}{c}\sin\frac{\omega l_4}{c} + \sin\frac{\omega l_2}{c}\cos\frac{\omega l_4}{c} - \frac{V_3\omega}{cF_4}\sin\frac{\omega l_2}{c}\sin\frac{\omega l_4}{c}\right) =$$

$$= \cos\frac{\omega l_4}{c}\cos\frac{\omega l_2}{c} - \frac{F_2}{F_4}\sin\frac{\omega l_2}{c}\sin\frac{\omega l_4}{c} - \frac{V_3\omega}{cF_4}\cos\frac{\omega l_2}{c}\sin\frac{\omega l_4}{c} \tag{2.24}$$

**3. Собственная частота колебаний жидкости в многоузловом разветвленном трубопроводе.** Пусть в пневмогидравлической системе имеются разветвления, состоящие в общем случае из многоступенчатых трубопроводов. В этом случае для определения собственной частоты уравнений системы (2.7) недостаточно, и поэтому необходимо добавить условия совместности в узле разветвления. При этом условие (2.2) можно записать следующим образом:

$$\frac{c_j^2}{F_j}\frac{\partial G_j(l_j, \tau)}{\partial x_j} = \frac{c_1^2}{F_1}\frac{\partial G_1(0, \tau)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{c_i^2}{F_i}\frac{\partial G_i(0, \tau)}{\partial x_i} \tag{3.1}$$

Здесь $j$ — номер магистрального трубопровода; $i$ — количество простых трубопроводов, на которые разветвляется $j$-й магистральный трубопровод.

Условие равенства массовых расходов в узле разветвления имеет вид

$$G_j(l_j, \tau) = \sum_{m=1}^{i} G_m(0, \tau) \tag{3.2}$$

Продифференцируем (1.3) по $x$ и подставим полученное выражение в (3.1). Тогда после преобразований, аналогичных приведенным выше, это выражение при помощи формул (1.3) и (3.2) можно привести к виду

$$\frac{F_j}{c_j}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_k l_j}{c_j} + \varphi_{jk}\right) = \sum_{m=1}^{i}\frac{F_m}{c_m}\operatorname{tg}\varphi_{mk} \tag{3.3}$$

Таким образом, собственную частоту колебаний жидкости и газа в сложной разветвленной трубопроводной коммуникации можно определить по уравнению (2.7) и (3.3).

Поступило 3 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднер В. А. Повышение мощности двигателей внутреннего сгорания. Дизелестроение, 1939, № 9, 10, 11.
2. Гладких П. А., Хачатурян С. А. Вибрации в трубопроводах и методы их устранения. Машгиз, 1959.
3. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, 1951.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, 1962.