

Непосредственно из (10)

$$s_0 \approx s [1 - \Gamma(s + 1)] \quad (11)$$

Функция  $s_0 = s_0(s)$  показана на фигуре.

Очевидно, величина  $s = 1$  не может быть получена путем выделения газа из раствора. Однако аналогом описанной задачи является фильтрация жидкости совместно со своими парами в области снижения давления ниже точки кипения. В этом случае возможно значение  $s = 1$ .

Поступило 7 VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Гостоптехиздат, 1963.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V. Физматгиз, 1959.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.

### ОБ ОДНОМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. И. ШВИДЛЕР (*Уфа*)

Как известно, решение гидродинамической задачи о фильтрационном поле в среде со случайной неоднородностью связано с построением некоторого нелинейного оператора  $p(x) = A\{k(x)\}$  и последующего вычисления его многомерной функции распределения или статистических моментов (здесь  $p$  — давление,  $k(x)$  — проницаемость среды — случайная функция точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ). Очевидно, что структура оператора  $A$  над функцией  $k(x)$  зависит не только от геометрии области течения, но и от краевых условий, заданных на границе потока. Это приводит, в частности, к тому, что эффективные характеристики среды — средняя проницаемость, средняя мощность и т. д., оказываются, вообще говоря, различными для одной и той же области и среды, но разных краевых условий. Поскольку построение оператора  $A$  легко осуществить для одномерных течений, ниже изучаются две задачи: (1) — случай задания детерминированных дебита и давления на одной из галерей и (2) — детерминированных давлений на галереях.

1. Рассмотрим стационарное линейное течение между галереями (1) и (2), расположенными на концах промежутка  $0 \leq x \leq l$  в том случае, когда задано давление на галерее (1) и дебит потока  $q$ . Очевидно, следует искать решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dp(x)}{dx} \right] = 0 \quad (1.1)$$

при условии

$$p(0) = p_1 \quad (1.2)$$

Нетрудно убедиться, что фиксирование дебита течения

$$q = k(x) \frac{dp(x)}{dx} \quad (1.3)$$

будет первым интегралом уравнения (1.1), и, следовательно, интегрируя (1.3) при условии (1.2), получим

$$p(x) - p_1 = q \int_0^x \frac{dx}{k(x)} \quad (1.4)$$

Осреднив (1.4) по вероятности, напишем

$$\langle p(x) \rangle - p_1 = q \int_0^x \langle k^{-1}(x) \rangle dx \quad (1.5)$$

Пусть  $k(x)$  — стационарная случайная функция с математическим ожиданием  $\langle k(x) \rangle = k_0 = \text{const}$  и одномерной плотностью распределения  $f(k)$ . Тогда  $k^{-1}(x)$  также стационарна и ее математическое ожидание

$$\langle k^{-1}(x) \rangle = \int f(k) \frac{dk}{k} = k_1^* = \text{const} \quad (1.6)$$

и определяется видом функции  $f(k)$ . Если, например, распределение  $\ln k$  является нормальным или его модификацией (4.8) из [1], то легко непосредственно проверить, что

$$k_1^* = \frac{k_0}{1 + \zeta^2} \quad \left( \zeta^2 = \frac{D[k]}{k_0^2} \right) \quad (1.7)$$

Здесь  $\zeta$  — коэффициент вариации проницаемости. Следует отметить, что (1.7) имеет место приближенно для любых  $f(k)$ , что вытекает из разложения

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0 + k'} = \frac{1}{k_0(1 + k'/k_0)} = \frac{1}{k_0} \left[ 1 - \frac{k'}{k_0} + \left( \frac{k'}{k_0} \right)^2 - \dots \right] \quad (1.8)$$

Здесь  $k'$  — флуктуации проницаемости.

В случае малых флуктуаций из (1.7) следует

$$k_1^* = k_0(1 - \zeta^2) \quad (1.9)$$

Интересно отметить, что  $k_1^*$  не зависит от корреляционных соотношений, а определяется лишь одноточечными моментами, в частности  $k_0$  и  $\zeta^2$ , что является следствием задания условия (1.3). Заметим также, что распределение  $\langle p(x) \rangle$  является линейным.

2. Рассмотрим задачу (2). Будем искать решение уравнения (1.1) при условиях

$$p(0) = p_1, \quad p(l) = p_2 \quad (2.1)$$

В этом случае для математического ожидания дебита в [1] методами теории возмущений, ограничиваясь первыми тремя приближениями, была получена формула

$$\langle q \rangle = q_0 \left[ 1 - \zeta^2 + \frac{\zeta^2}{l^2 k_0^2} \int_0^l \int_0^l K^*(x, x') dx dx' \right] \quad (2.2)$$

где  $K^*$  — нормированная автокорреляционная функция проницаемости, а  $q_0$  — несмещенная оценка математического ожидания дебита

$$q_0 = \frac{k_0(p_1 - p_2)}{l} \quad (2.3)$$

Если принять  $K^*(x, x') = \exp[-|x - x'|/\alpha]$ , то из (2.2) следует

$$\langle q \rangle = q_0 \left[ 1 - \zeta^2 [1 - \varphi(l/\alpha)] \right], \quad 9\varphi(z) = 2z^{-2}(e^{-z} + z - 1) \quad (2.4)$$

Эффективная средняя проницаемость в этом случае запишется как

$$k_2^* = k_0(1 - \zeta^2\eta), \quad \eta = 1 - \varphi(l/\alpha) \quad (2.5)$$

и зависит не только от  $k_0$  и  $\zeta$ , но и от параметра  $l/\alpha$ .

Приведем некоторые значения функции  $\eta = \eta(l/\alpha)$

$\alpha/l = 0$	0.001	0.01	0.1	0.2	0.5	1	2	10
$\eta = 1$	0.998	0.980	0.820	0.680	0.430	0.26	0.150	0.030

Нетрудно видеть, что для крупномасштабных флуктуаций ( $l/\alpha \ll 1$ ) из (2.5) следует  $k_2^* \approx k_0$ . Напротив, для мелкомасштабных флуктуаций ( $l/\alpha \gg 1$ ) получим

$$k_2^* = k_0(1 - \zeta^2) \quad (2.6)$$

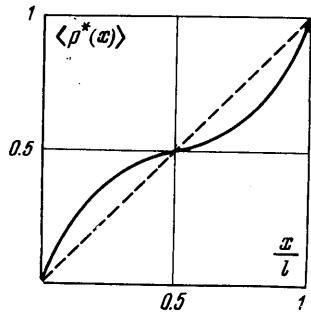
что совпадает с формулой (1.9), верной для достаточно малых  $\zeta$  в случае задачи (1). Следует отметить, что соотношение (2.5) при достаточно больших  $\zeta$  применимо лишь для крупномасштабных флуктуаций. Учитывая структуру формулы (1.7), можно ожидать, что в случае больших  $\zeta$  эффективную проницаемость для задачи (2) следует записать в виде

$$k_2^* = k_0(1 + \zeta^2\eta)^{-1} \quad (2.7)$$

Проведем сравнение  $k_1^*/k_0$  и  $k_2^*/k_0$ , положив, например,  $\zeta^2 = 1$ . Тогда  $k_1^*/k_0 = 0.5$ , а для  $k_2^*/k_0$ , полученных согласно (2.7) для значений  $\eta$ , указанных выше, будем иметь

$\alpha/l = 0$	0.001	0.01	0.1	0.2	0.5	1	2	10
$k_2^*/k_0 = 0.500$	0.500	0.505	0.550	0.595	0.700	0.794	0.870	0.970

Таким образом, в области мелкомасштабных флуктуаций эффективные характеристики близки. Естественно, что при  $\zeta^2 < 1$  близость будет большей, при  $\zeta^2 > 1$  — меньшей, чем полученная.



Фиг. 1

Перейдем к изучению распределения давления в задаче (2). Нетрудно проверить, что решение уравнения (1.1) при условиях (2.1) имеет вид

$$p(x) = p_1 - (p_1 - p_2) \int_0^x k^{-1}(x) dx / \int_0^l k^{-1}(x) dx \quad (2.8)$$

Разлагая  $k^{-1}(x)$  в ряд по степеням флуктуаций  $k' = k - k_0$ , получим, удержав квадратичные члены и усреднив по вероятности для безразмерного давления  $p^*(x)$

$$\langle p^*(x) \rangle = \frac{x}{l} [1 + \zeta^2 \mu(x, l)] \quad \left( p^*(x) = \frac{p(x) - p_1}{p_2 - p_1} \right) \quad (2.9)$$

$$\mu(x, l) = \frac{1}{e_2} \int_0^l \int_0^l K^*(x, x') dx dx' - \frac{1}{xl} \int_0^l \int_0^x K^*(x, x') dx dx'$$

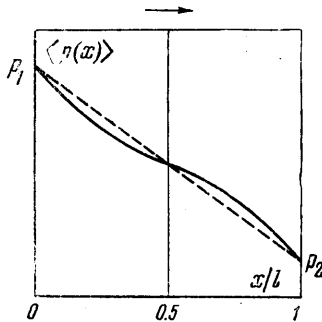
Используя снова корреляционную функцию  $K^* = \exp[-|x - x'|/\alpha]$ , получим после преобразований

$$\mu = \Phi\left(\frac{l}{\alpha}\right) - \frac{x}{2l} \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{\alpha^2}{xl} \left( e^{-l/\alpha} - e^{-(l-x)/\alpha} + \frac{x}{\alpha} \right) \quad (2.10)$$

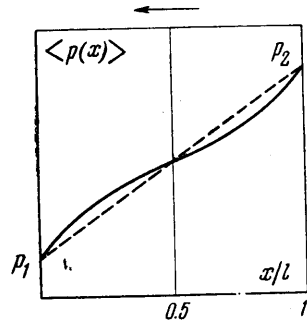
Результаты подсчетов  $\mu(x/l, l/\alpha)$  по формуле (2.10) представлены в таблице.

$l/\alpha$	$x/l = 0$	0.1	0.25	0.4	0.5	0.60	0.75	0.9	1
0.1	0.0159	0.0114	0.0061	0.0019	0	-0.0013	-0.0020	-0.0008	0
1	0.1637	0.0743	0.0385	0.0123	0	-0.0032	-0.0128	-0.0082	0
2	0.1354	0.0958	0.0490	0.0156	0	-0.0103	-0.0161	-0.0106	0
5	0.1219	0.0780	0.0373	0.0113	0	-0.0076	-0.0125	-0.0039	0
10	0.0800	0.0432	0.0167	0.0046	0	-0.0031	-0.0055	-0.0048	0
$\infty$	0.0098	0.0008	0.0002	0.0000	0	-0.0000	-0.0001	-0.0001	0
0100	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0

Нетрудно видеть, что распределение  $\langle p^*(x) \rangle$  при любых  $l/\alpha$ , отличных от нуля и бесконечности, имеет вид кривой, изображенной на фиг. 1, где пунктиром указано линейное распределение. Любопытно, что средняя безразмерная депрессия при



Фиг. 2



Фиг. 3

$0 \leq x/l \leq 0.5$  больше, а при  $0.5 \leq x/l \leq 1$  — меньше, чем  $x/l$ , т. е. безразмерной депрессии, соответствующей линейному распределению давления. При  $\zeta^2$ , не слишком больших (например, порядка единиц), это отклонение малосущественно.

Рассмотрим изменение размерного среднего давления для двух случаев:  $p_1 > p_2$  и  $p_1 < p_2$ . Нетрудно убедиться, что в соответствии с (2.9) и таблицей кривые  $\langle p(x) \rangle$  имеют вид, изображенный на фиг. 2, 3, где пунктиром нанесено линейное распределение, а стрелкой указано направление движения. Как видно на фигурах, на половине течения, примыкающей к той из галерей, давление на которой больше, т. е. входной, среднее давление меньше, чем в линейном случае. У выходной галереи давление, наоборот, больше, чем линейное. И этот, несколько неожиданный эффект своеобразной анизотропии, связанной с направлением потока, является следствием нелинейности оператора (2.8).

Поступило 28 VIII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ш в и д л е р М. И. Фильтрационные течения в неоднородных средах. Гостоптехиздат, 1963.