О НЕСВЯЗНОЙ НАСЫЩЕННОСТИ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ И ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

М. И. ВАЙНЕР *(Москва)*

Известно, что в двухфазном фильтрационном потоке фазовая проницаемость газа, выделившегося из раствора в капельной жидкости при снижении давления ниже давления насыщения, меньше, чем фазовая проницаемость газа, введенного в пористую среду извне (внешнего газа) [1]. Указанный факт обычно объясняется возможностью существования несвязной, изолированной от основной массы, части газонасыщенности. Это явление не имеет до настоящего времени строгого количественного обоснования. Ниже сделана попытка теоретического анализа этой задачи.

Разобьем поровое пространство однородной пористой среды на конечное число односвязных областей, каждую из которых назовем порой. Пора характеризуется объемом v_i. Выделим внутри каждой поры некоторую геометрически характерную точку T_i. В этом случае в пористой среде будет определено некоторое счетное множество $\varepsilon\ \{T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n\}$ конечной меры $G(\varepsilon)$ [2].

Положим, что выделяющийся в поре пузырек газа занимает ее целиком. Процесс заполнения пор различной величины выделяющимся из раствора газом будем считать стохастическим и равновероятным по отношению к v_i. В этом случае для достаточно больших областей, занятых выделившимся газом

$$Ms^\circ = P\,(s_0 = 0)s \tag{1}$$

Здесь Ms° — математическое ожидание величины связной (составляющей континуум) газонасыщенности, s_0 — величина несвязной газонасыщенности, $P\,(s_0 = 0)$ — вероятность реализации события $s_0 = 0$, s — общая газонасыщенность.

Упорядочим множество ε, выделив в нем N подмножеств, каждое из которых состоит из заведомо связных точек

$$\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \subset \ldots \subset \varepsilon_{i-1} \subset \varepsilon_i \subset \ldots \subset \varepsilon_{N-1} \subset \varepsilon_N, \qquad \varepsilon_N \equiv \varepsilon \tag{2}$$

Все остальные произвольно образованные подмножества множества ε не могут состоять из полностью связных элементов.

Считая процесс выделения пузырьков газа дискретным, определим вероятность того, что вновь заполняемая пора принадлежит подмножеству ε

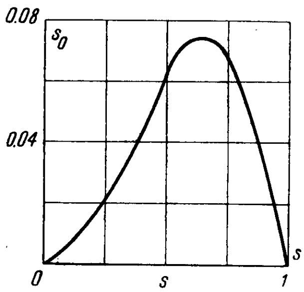
$$P\,(T_n \in \varepsilon_n) = G\,(\varepsilon_n)\ /\ G\,(\varepsilon) \tag{3}$$

Из (3) по правилу умножения вероятностей [3]

$$P\,(s_0 = 0) = G\,(\varepsilon_1)\,G(\varepsilon_2)\ldots G\,(\varepsilon_n)/G\,(\varepsilon)^n = \prod_{i=1}^{n} \frac{G\,(\varepsilon_i)}{G\,(\varepsilon)} \tag{4}$$

После введения меры $g(\tau)$ одноточечного множества $\tau\{Ti\}$, причем $ng\,(\tau) = G\,(\varepsilon_n)$ с учетом (1) выражение (4) примет вид

$$s^\circ \approx Ms = n!s\,[g\,(\tau)\ /\ G\,(\varepsilon)]^n \tag{5}$$



Переходя вновь к $G\,(\varepsilon_n)$ и учитывая, что мера может принимать не одни только целочисленные значения

$$s^\circ \approx s\,\Gamma\,[G\,(\varepsilon_n) + 1]\ /\ G\,(\varepsilon)^{G(\varepsilon_n)/g(\tau)} \tag{6}$$

Из физического смысла очевидно, что в силу стохастического характера процесса выделения газа

$$G\,(\varepsilon_n) = sG\,(\varepsilon) \tag{7}$$

Меры $G\,(\varepsilon)$, $G\,(\varepsilon_n)$ могут быть определены из граничных условий

$$s_0 = 0, \qquad G\,(\varepsilon_n) = 0 \ \text{ при } \ s = 0 \tag{8}$$

$$s_0 = 0, \qquad G\,(\varepsilon_n) = G\,(\varepsilon) \ \text{ при } \ s = 1 \tag{9}$$

Граничное условие (8) удовлетворяется при любом $G\,(\varepsilon)$. Граничное условие (9) удовлетворяется только при $G\,(\varepsilon) = 0$ и $G\,(\varepsilon) = 1$. Первое значение не представляет интереса, так как в этом случае множество ε — пустое. Подставляя второе значение в (6), получим

$$s^\circ \approx s\Gamma\,(s + 1)\sqrt[g(\tau)]{1} = s\Gamma\,(s + 1) \tag{10}$$

причем, как видно, выражение для s° инвариантно к выбору меры $g\,(\tau)$.

Непосредственно из (10)

$$s_0 \approx s\,[1 - \Gamma(s+1)] \tag{11}$$

Функция $s_0 = s_0(s)$ показана на фигуре.

Очевидно, величина $s = 1$ не может быть получена путем выделения газа из раствора. Однако аналогом описанной задачи является фильтрация жидкости совместно со своими парами в области снижения давления ниже точки кипения. В этом случае возможно значение $s = 1$.

Поступило 7 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Гостоптехиздат, 1963.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V. Физматгиз, 1959.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.

ОБ ОДНОМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. И. ШВИДЛЕР *(Уфа)*

Как известно, решение гидродинамической задачи о фильтрационном поле в среде со случайной неоднородностью связано с построением некоторого нелинейного оператора $p(x) = A\{k(x)\}$ и последующего вычисления его многомерной функции распределения или статистических моментов (здесь p — давление, $k(x)$ — проницаемость среды — случайная функция точки $x = (x_1, x_2, x_3)$). Очевидно, что структура оператора A над функцией $k(x)$ зависит не только от геометрии области течения, но и от краевых условий, заданных на границе потока. Это приводит, в частности, к тому, что эффективные характеристики среды — средняя проницаемость, средняя мощность и т. д., оказываются, вообще говоря, различными для одной и той же области и среды, но разных краевых условий. Поскольку построение оператора A легко осуществить для одномерных течений, ниже изучаются две задачи: (1) — случай задания детерминированных дебита и давления на одной из галерей и (2) — детерминированных давлений на галереях.

1. Рассмотрим стационарное линейное течение между галереями (1) и (2), расположенными на концах промежутка $0 \leqslant x \leqslant l$ в том случае, когда задано давление на галерее (1) и дебит потока q. Очевидно, следует искать решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dp(x)}{dx}\right] = 0 \tag{1.1}$$

при условии

$$p(0) = p_1 \tag{1.2}$$

Нетрудно убедиться, что фиксирование дебита течения

$$q = k(x)\frac{dp(x)}{dx} \tag{1.3}$$

будет первым интегралом уравнения (1.1), и, следовательно, интегрируя (1.3) при условии (1.2), получим

$$p(x) - p_1 = q\int_0^x \frac{dx}{k(x)} \tag{1.4}$$

Осреднив (1.4) по вероятности, напишем

$$\langle p(x)\rangle - p_1 = q\int_0^x \langle k^{-1}(x)\rangle\, dx \tag{1.5}$$

Пусть $k(x)$ — стационарная случайная функция с математическим ожиданием $\langle k(x)\rangle = k_0 = \text{const}$ и одномерной плотностью распределения $f(k)$. Тогда $k^{-1}(x)$ также стационарна и ее математическое ожидание

$$\langle k^{-1}(x)\rangle = \int f(k)\frac{dk}{k} = k_1{}^* = \text{const} \tag{1.6}$$